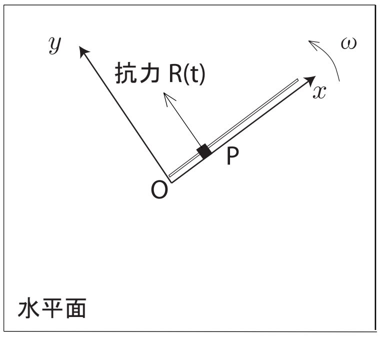
2014/2/7

力学II(西浦，田中担当クラス) 試験問題

1. 水平面内で、滑らかな棒が端点 O の周りに一定角速度 ω で回転している。この棒に質量 m の小輪 P をさしこみ、はじめ $OP = a$ の位置に静かに置いた。t 秒後における、O 点から小輪 P までの距離、および、小輪が棒から受ける水平面内の抗力の大きさを求めたい。水平面内に、O 点を原点とし棒とともに同じ角速度 ω で回転する 2 次元回転座標系 $O-xy$ をとる。（水平面内に、棒の方向に x 軸と、棒に垂直な方向に y 軸を設定する。）

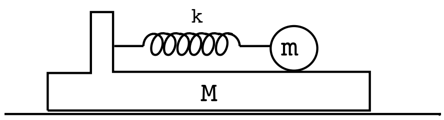


この回転座標系から見ると、小輪 P は、水平面内にある 3 つの力、すなわち、実際の力である、棒に垂直な方向に働く抗力、見かけの力である、棒の方向に働く遠心力、および棒に垂直な方向に働くコリオリの力を受けて水平面内を運動している。このとき、次の問いに答えよ。

   (a) 回転座標系 $O-xy$ を使って、t 秒後の小輪 P の位置を $(x(t), 0)$ で表わす。t 秒後に小輪に働いているコリオリの力の大きさと遠心力の大きさを、$x(t)$ を用いてそれぞれ表せ。

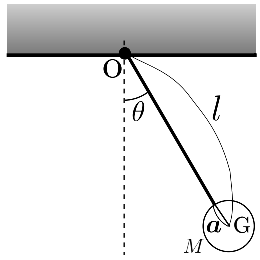
   (b) t 秒後の小輪に働く水平面内の抗力の大きさを $R(t)$ として、小輪 P の各座標軸方向の運動方程式を書き下せ。また、これらを解いて $x(t)$ と $R(t)$ を求めよ。

2. 水平で滑らかな床の上に質量 M の水平な台があって、その上に図のようにばね振り子（おもりの質量 m、ばねのばね定数 k）が取り付けられている。



おもりに働く摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。いま、左手で台を押さえ、右手でおもりを平衡の位置より少し右に引っ張ってのち、両手を同時に静かにはなした。その後の重心の速度と、ばねの伸縮の周期を求めよ。（ヒント：２体問題として扱えばよい）

3. 右図のように，半径 a，質量 M の一様な球を，重さを無視できる棒の先端に取り付け，他端を鉛直面 (紙面) 内で自由に回転できるようにして支点 O に取り付けた．(支点自体は固定されている．) 支点 O から球の中心 G までの長さを ℓ とする．



(a) この球の中心を通る軸のまわりの慣性能率を求めよ．

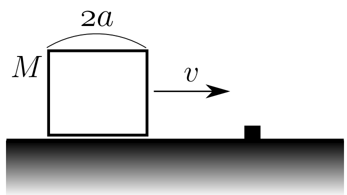
(b) 支点を通り鉛直面に垂直な軸のまわりの慣性能率を求めよ．

(c) 鉛直下向きから測った棒の角度を θ として，θ の従う回転の運動方程式を導け．(重力加速度は g とする．)

(d) $|\theta| \ll 1$ のときの振動 (微小振動) の周期 T を求めよ．

(e) もし球の半径 a を無視できれば，これは長さ ℓ の単振り子の周期 T_0 に一致する．$\ell = 100$ cm, $a = 5$ cm のとき，T と T_0 の違いは何%か．(T/T_0 が 1 からどれだけずれるか近似的に評価すればよい．)

4. 摩擦の無い水平な台の上を，辺の長さ $2a$，質量 M の一様な立方体が，1 つの側面に垂直に速度 v で滑っている．



(a) この立方体の重心を通り面に垂直な軸の回りの慣性能率を求めよ．

(b) 図のように，台の上には立方体の進行方向に垂直な断面の小さなレール状の突起があり，これに立方体は衝突する．衝突の際，立方体の進行方向前面の下辺は瞬時に静止し，この辺を中心軸として立方体は回転を始める．(突起を中心として回転するといってもよい．) この立方体の 1 つの辺の回りの慣性能率を求めよ．

(c) 衝突の瞬間，立方体は突起から撃力 (きわめて短時間に働く大きな力) を受ける．また，重力も作用している．衝突の直前と直後で，突起のまわりの角運動量は保存する．その理由を述べよ．

(d) この角運動量を求めよ．

(e) 衝突直後の角速度を求めよ．

(f) 衝突時の運動エネルギーの損失の割合を求めよ．

(g) 前方に完全にころがるために必要な速度 v の最小値を求めよ．

なお，問題 3，4 で必要であれば次の「平行軸の定理」を用いてもよい．

「質量 M の剛体の重心 G を通る軸のまわりの慣性能率を A_G とする．この軸に平行で距離 d だけ離れた軸のまわりの慣性能率は，$Md^2 + A_G$ で与えられる．」