5.2 電磁波

電磁気学詳論 I (2021)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 5 章 マクスウェル方程式と電磁波

5.2.1 自由空間でのマクスウェル方程式の解

$\rho = 0$，$\boldsymbol{i} = 0$ とする．(自由空間)
x，y によらず z のみの関数であるような解を考えよう．つまり，
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(z, t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}(z, t)$.
式 (5. 1. 20) から，($\rho = 0$ として)

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,. \tag{1}$$

式 (5. 1. 21) から，

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,. \tag{2}$$

式 (5. 1. 22) から，

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\,,\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\,,\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\,. \tag{3}$$

式 (5. 1. 23) から ($\boldsymbol{i} = 0$ として)，$\mu_0\varepsilon_0 = 1/v^2$ とおくと，

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\,,\ \ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\,,\ \ 0 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}\,. \tag{4}$$

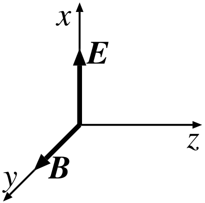
式 (1) と式 (4) の第 3 式から，E_z は定数．静電場はないとして，$E_z = 0$ と置く．同様に静磁場もないとして，式 (2) と式 (3) の第 3 式から，$B_z = 0$.

E_x と E_y は一般にゼロでないが，特に $E_y = 0$ となる解を考えよう．
このとき，式 (3) の第 1 式，式 (4) の第 2 式より，

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0\,. \tag{5}$$

つまり，$B_x = 0$ と置ける．これと，式 (3) の第 1 式，式 (4) の第 2 式から，

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0\,.\ (E_y = 0 \text{ と無矛盾})$$



ここまでの結果をまとめると，

$$\boldsymbol{E} = (E_x(z,t), 0, 0)\,, \quad \boldsymbol{B} = (0, B_y(z,t), 0)\,.$$

残っている方程式は式 (3) の第 2 式と式 (4) の第 1 式.

$\frac{\partial}{\partial z}$[(3) の第 2 式] $+$ $\frac{\partial}{\partial t}$[(4) の第 1 式] から，

(1 次元) 波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x = 0\,. \tag{6}$$

$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}$[(3) の第 2 式] $+$ $\frac{\partial}{\partial z}$[(3) の第 2 式] から，

(1 次元) 波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_y - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_y = 0\,. \tag{7}$$

波動方程式 (6) の一般解

$$E_x(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt)\,,\ f, g \text{ は任意関数}. \tag{8}$$

$\because$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f'' + g''\,,\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (-v)^2 f'' + (+v)^2 g'' = v^2 (f'' + g'')\,.$$

このとき，式 (3) の第 2 式と式 (4) の第 1 式より，

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -f' - g'\,,\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v}(f' - g')\,. \tag{9}$$

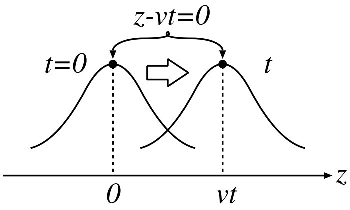
これを積分して，

$$B_y(z,t) = \frac{1}{v}[f(z - vt) - g(z + vt)] + \text{定数}. \tag{10}$$

(これが式 (7) をみたしていることも明らか．定数は以下では 0 とする．)

この解の意味

$f(z - vt)$



速さ v で z 軸の正の方向に進む波

同様に，$g(z + vt)$ は速さ v で z 軸の負の方向に進む波を表わす．

時刻 t で $z \pm vt$ が一定の面 (波面) は z 軸に垂直な平面．$\Rightarrow$ 平面波

$\rho = 0$，$\boldsymbol{i} = 0$ でも真空中を電磁場は伝わって行く．$\Rightarrow$ 電磁波

5.2.2 電磁波の性質

式 (2. 1. 3) と式 (3. 3. 2) から，

電磁波の速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c\,, \quad \text{(真空中の) 光速}\,. \tag{11}$$

$\Rightarrow$ 光は電磁波.

電磁場は横波

式 (8)，(10) の解は z 軸の正の方向に進み，$\boldsymbol{E}$ は x 軸方向，$\boldsymbol{B}$ は y 軸方向．g の解は z 軸の負の方向に進み，$\boldsymbol{E}$ は x 軸方向，$\boldsymbol{B}$ は y 軸の負の方向．($f, g > 0$ として．) すなわち，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ は電磁波の進行方向に垂直.

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ も互いに垂直．一般に，$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \propto$ 進行方向 となる.

5.2.3 調和振動解

(3 次元) 波動方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0\,, \tag{12}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0\,. \tag{13}$$

$\because$ $\frac{\partial}{\partial t}$(5. 1. 23) に (5. 1. 22) を代入すると，($\boldsymbol{i} = 0$ として)

$$\boldsymbol{\nabla} \times (-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\,. \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta\boldsymbol{E} \tag{15}$$

と (5. 1. 20) ($\rho = 0$) を用いれば式 (12) を得る．同様に，
$\frac{\partial}{\partial t}$(5. 1. 22) と (5. 1. 23) から，式 (13) を得る．

調和振動解 (単色波)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \tag{16}$$

$\omega(>0)$ は定数，$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{k}$ は定数ベクトルで，$\omega = ck$ ($k := |\boldsymbol{k}|$)).

$\because$ 式 (12) に式 (16) を代入すると，

$$\boldsymbol{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \ \Rightarrow \ k = \frac{\omega}{c}. \tag{17}$$

ω は角振動数で，$\hat{\boldsymbol{E}}_0$ は電場の向きを表し，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルと呼ばれる．式 (16) は $\boldsymbol{k}$ の方向に進む波を表している．

式 (5. 1. 20) から，$(\rho = 0)$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0, \ \text{電場は } \boldsymbol{k}(\text{進行方向}) \text{ に垂直．(横波)} \tag{18}$$

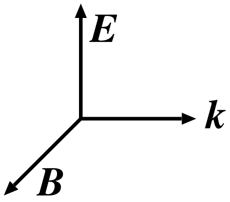
式 (5. 1. 22) に式 (16) を代入して，

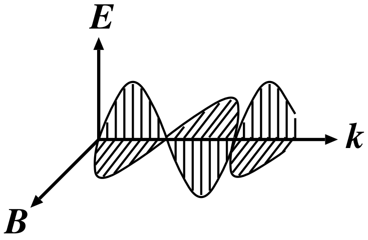
$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}). \tag{19}$$

これを積分して，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,, \text{ 磁場は } \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{k} \text{ と垂直．(横波)} \qquad (20)$$

を得る．(これが式 (13) の解であることも明らか．)





また，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ を用いて，

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}] = \frac{\boldsymbol{E}^2}{\omega}\boldsymbol{k}\,. \qquad (21)$$