第5章 マクスウェル方程式と電磁波

5.1 マクスウェル方程式

電磁気学詳論 I (2021)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 5 章 マクスウェル方程式と電磁波

5.1.1 電場と磁場の双対性 (duality)

これまでに分かった電磁場の基本方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \quad \text{(ガウスの法則)} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\,, \quad \text{(ファラデーの法則)} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,. \quad \text{(アンペールの法則)} \tag{4}$$

式 (1)，(2) は動的な場合も成り立つ．(理由は以下で．)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}\,. \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,. \tag{6}$$

式 (6) は磁場に対するガウスの法則．“磁荷” が存在しないだけ．
式 (3) は変化する磁場から電場ができることを表わしている．

式 (4) も式 (5)，(6) のように動的な場に拡張してみよう．

$$(\text{誤}) \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{7}$$

電場と磁場の対応関係 (双対性) を考慮して，式 (3) と (7) を比較してみると，(3) の右辺に (7) の電流に相当する “磁流” がないのは，(6) で “磁荷” がないためと考えられる．(7) の右辺には，(3) の右辺のように，$\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ のような項があると推測される．(変動する電場も磁場を作るだろう．)

5.1.2 アンペール・マクスウェルの法則

アンペール・マクスウェルの法則

(正) $$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \left[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \tag{8}$$

証明のアイデア: 電荷保存則と矛盾しないように式 (7) を拡張する.

証明: 式 (7) の発散を考える.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{9}$$

左辺 $= 0$. これは電荷保存則 (§§3. 1. 2)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{10}$$

と矛盾する. 式 (5) を用いると,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,. \tag{11}$$

すなわち，電荷保存則は，

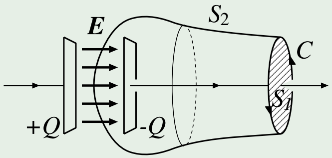
$$\nabla \cdot \left[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \right] = 0 \tag{12}$$

と書ける．⇒ 式 (7) で $\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ とすればよい．(証明終)

変位電流 (密度)

$$\boldsymbol{i}_d(\boldsymbol{r},t) := \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{13}$$

例 1: コンデンサーと変位電流



平行板コンデンサーに電流 $I(t)$ が流れている．閉曲線 C とそれに囲まれた 2 つの面 S_1 と S_2 を考える．

式 (8) の両辺を S_1 で積分すると，

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_{S_1} \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 I\,. \tag{14}$$

(S_1 には電場はないから，変位電流の寄与はない．)
面 S_2 で積分すると，そこには (伝導) 電流はないから，

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}\,. \tag{15}$$

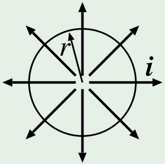
(変位電流の寄与のみ．)
極板の電荷を $\pm Q(t)$，面積を S とすると，式 (2. 8. 2) より，

$$E(t) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_0 S}\,. \tag{16}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{I}{\varepsilon_0 S} \int_S dS = \mu_0 I\,. \tag{17}$$

(積分は $\boldsymbol{E}$ のあるところだけ，つまり極板間のみ．) 式 (14) と一致．
もし変位電流を考えないとこれは 0 になり，式 (14) と矛盾．

例 2: 球対称で放射状の電流



半径 r の球面 S を考える．この内部の電荷を $Q(r,t)$ とすると，電流密度は $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = i(r,t)\hat{\boldsymbol{r}}$ と書け，

$$i(r,t) = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial t}Q(r,t)\,. \tag{18}$$

S 上の閉曲線 C を考える．S_C を C に囲まれた面として，

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} &= \mu_0\int_{S_C}\left(\boldsymbol{i}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \mu_0\int_{S_C}\left[i+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)\right]dS\\ &= \mu_0\int_{S_C}\left[i+\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\right]dS = 0\end{aligned} \tag{19}$$

磁場はできない．

5.1.3 マクスウェル (Maxwell) 方程式

電磁場の方程式をまとめると,

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}\,, \tag{20}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,, \tag{21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{22}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{23}$$

これらとローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{24}$$

が電磁気学の基本法則となる.

Q. マクスウェルの方程式に解はあるか？

$$\left(\begin{array}{lll} \text{未知関数} & \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} & 6\text{個} \\ \text{方程式の数} & & 8\text{個} \end{array} \right.$$

A. 式 (23) の発散を考えると，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} . \tag{25}$$

左辺 $= 0$．また，電荷保存則から $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i} = -\partial \rho / \partial t$. よって，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0 . \tag{26}$$

従って，$t = t_0$ で $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0) = \rho(\boldsymbol{r}, t_0)/\varepsilon_0$ が成り立てば，任意の時刻 t で式 (20) が成り立つ．すなわち，式 (20) は初期条件として要求するだけでよい．(これが式 (1) $\Rightarrow$ 式 (5) の理由．)

同様に式 (22) の発散を考えると，

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}\,. \qquad (27)$$

$t = t_0$ で $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t_0) = 0$ なら，任意の t で $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0$.
式 (20) と式 (21) が初期条件として成り立っていれば，式 (22) と式 (23) で決定される $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ の時間発展で式 (20)，式 (21) が成り立たなくなるようなことはない.

$\Rightarrow$ 式 (20)，式 (21) は補助的な方程式で，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ (6 つの未知関数) の時間発展は式 (22)，式 (23) (6 つの方程式) で記述される.

5.1.4 準定常電流

インダクタンスの議論 (§4. 2) で，定常電流の場合の式を (4. 2. 8) のように時間的に変動する電流に拡張した．電流が導体中を流れるとき，オームの法則

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{28}$$

より，$\boldsymbol{i}$ が時間変化する場合には $\boldsymbol{E}$ も時間的に変化する．
$\Rightarrow$ 変位電流 $\boldsymbol{i}_d$ が生じる．

§4. 2 ではこれを無視していたが，$|\boldsymbol{i}_d| \ll |\boldsymbol{i}|$ であればよい．

ここで，電場が振動していて，

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \sin \omega t \quad (\boldsymbol{E}_0 = \text{定数ベクトル}) \tag{29}$$

と表わされるとしよう．式 (28) より，

$$\boldsymbol{i}(t) = \sigma \boldsymbol{E}_0 \sin \omega t\,. \tag{30}$$

変位電流は,

$$\boldsymbol{i}_d(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t\,. \tag{31}$$

$\boldsymbol{i}(t)$ と $\boldsymbol{i}_d(t)$ の振幅を比較して,

$$\varepsilon_0 \omega \ll \sigma \tag{32}$$

であれば，変位電流を無視してよい.

準定常電流

変位電流を無視してもいいような電流.

電気伝導率 σ は (20°C で),

	鉄	銅	アルミニウム
$\sigma\,(\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1})$	1.0×10^7	5.8×10^7	3.6×10^7

$\sigma \sim 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ として，式 (32) より，

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim \frac{10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}}{10^{-11}\ \mathrm{C}^2\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2}} = 10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{33}$$

(紫外線の振動数に相当．)

家庭用の交流は $60(50)$ Hz.

$$\omega \sim 2\pi \times 60\ \mathrm{s}^{-1} \sim 10^2\ \mathrm{s}^{-1} \ll 10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{34}$$

$\Rightarrow$ 変位電流を無視してよい.