

## 2.5 ガウス (Gauss) の法則

電磁気学詳論Ⅰ(2021)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

## 第2章 静電場

## 2.5.1 ベクトル場の面積分と流束 (flux)

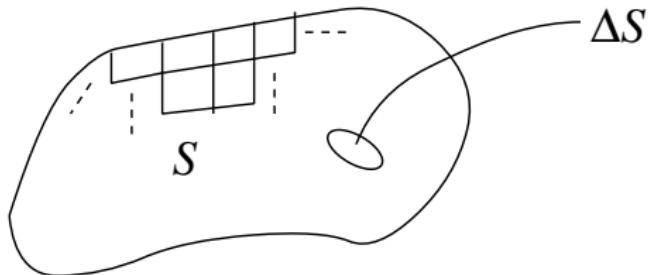
各点での速度が  $v(r)$ (ベクトル場) で与えられるような流体を考える。小さな面  $\Delta S$  を考え、その法線方向の単位ベクトルを  $n$  とする。単位時間に  $\Delta S$  を通って流れる流体の量は、 $v_n$  を  $v$  の  $n$  方向成分として、

$$v_n \Delta S = v \cdot n \Delta S = v \cdot \Delta S, \quad n \Delta S =: \Delta S. \quad (1)$$

となる。



一般の面  $S$  について、単位時間に  $S$  を通って流れる流体の量は、 $S$  を多数の小さな面  $\Delta S_i$  に分割して考えれば、



## 面 $S$ を通る流束 (flux)

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{面積分}) \quad (2)$$

## 2.5.2 ガウスの法則(積分形)

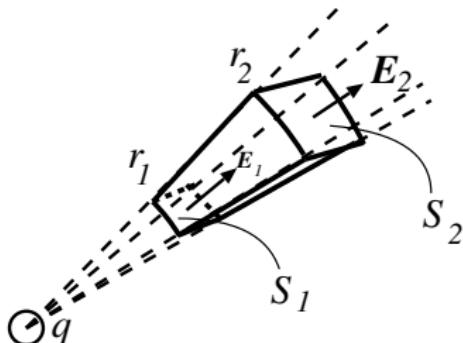
### 積分形のガウスの法則

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0} \quad Q_{\text{int.}} := \text{閉曲面 } S \text{ の内部の電荷} \quad (3)$$

1/r<sup>2</sup> 則の帰結

証明のアイデア: 流束の考え方を電場にも当てはめる。まず1個の点電荷について示し、重ね合わせの原理で一般化する。

証明: 正の点電荷  $q$  が1個ある場合。



図のような半径  $r_1$  と  $r_2$  の球面の一部で挟まれた領域の表面  $S$ (閉曲面)を考  
える。

$$S = S_1 + S_2 + \text{側面} \quad (4)$$

側面を通る電場は0なので、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

閉曲面の場合、法線ベクトルは外向きにとる。

$$\int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} dS, \quad \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_2^2} \int_{S_2} dS \quad (6)$$

( $1/r^2$  則が使われた。) さらに,

$$\frac{\int_{S_1} dS}{\int_{S_2} dS} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (7)$$

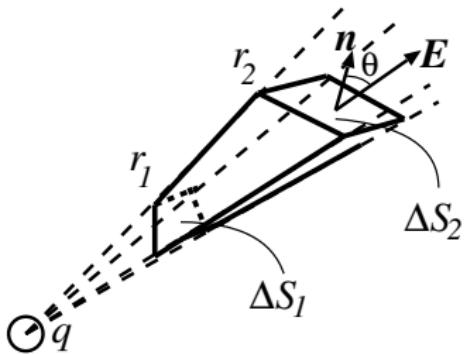
を用いると、

$$-\int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (8)$$

すなわち、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9)$$

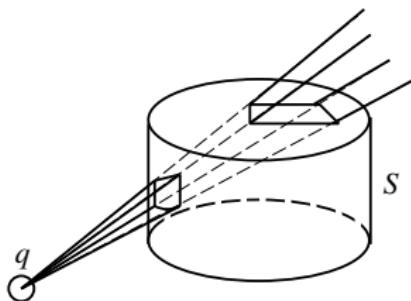
次に、中心部分の角度が小さいとして、 $S_1$ 、 $S_2$  が動径について“傾いて”いる場合を考えよう。



$\Delta S_i$  の面積は傾いていないときの  $1/\cos\theta$  倍になる。 $\Delta S_i$  は小さいから  $E$  の値はその上で一定とみなせ、 $E$  の法線成分は  $E_n = E \cdot n = E \cos\theta$ 。よって、

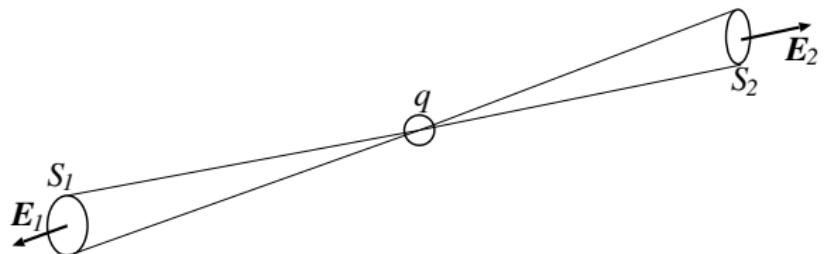
$$-E_1 \cdot \Delta S_1 = E_2 \cdot \Delta S_2. \quad (10)$$

つまり、式(9)が成り立つ。

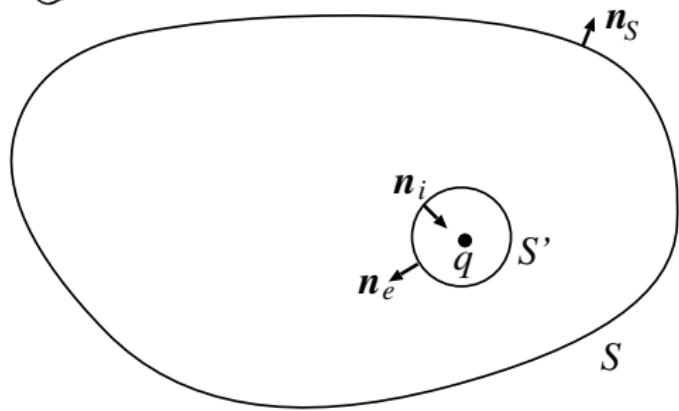


内部に電荷  $q$  を含まないような一般の閉曲面  $S$  についても、図のような小錐体の集まりを考えれば、下面と上面で流束は打ち消し合う。

$$\int_S E(r) \cdot dS = 0, \quad S \text{ は } q \text{ を含まない閉曲面.} \quad (11)$$



$S$  が  $q$  をその内部に含む場合、明らかに  $S_1$  と  $S_2$  の寄与は打ち消さない。



そこで、 $q$  を囲む小さな面  $S'$  を考え、 $S$  の内部から  $S'$  の内部を取り除く。

この  $S$  と  $S'$  に挟まれた領域については、( $q$  を含まないから)

$$\int_{S+S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (12)$$

が成り立つ。(このとき、 $S'$  の法線ベクトルは内向きの  $n_i$ 。)

$S'$  の法線ベクトルを外向きの  $n_e$  にとることにすれば,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13)$$

(すなわち,  $S$  を通る流束は  $S'$  を通る流束に等しい。)

$S'$  の形は任意だから, 半径  $r$  の球面を考えることにすると,

$$\int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} (= N \leftarrow \text{電気力線の本数}). \quad (14)$$

(うまく,  $r$  によらない数になっている。) 式(13)より,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad S \text{ は } q \text{ を含む閉曲面}. \quad (15)$$

まとめると,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0, & q \text{ が } S \text{ の外部にあるとき} \\ q/\varepsilon_0, & q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき} \end{cases} \quad (16)$$

( $S$  は任意の閉曲面。)

点電荷が複数あるときは,

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i \quad (17)$$

から,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i \in \text{内部}} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0}, \quad (18)$$

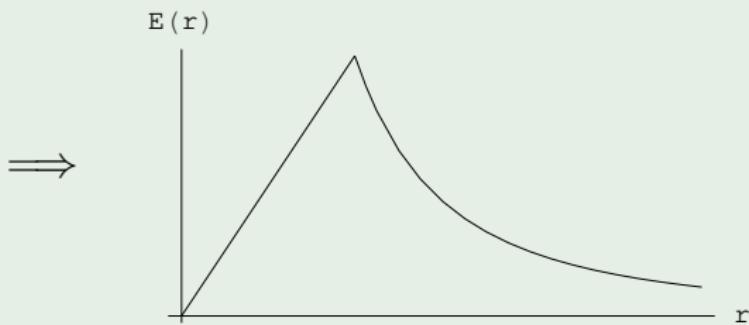
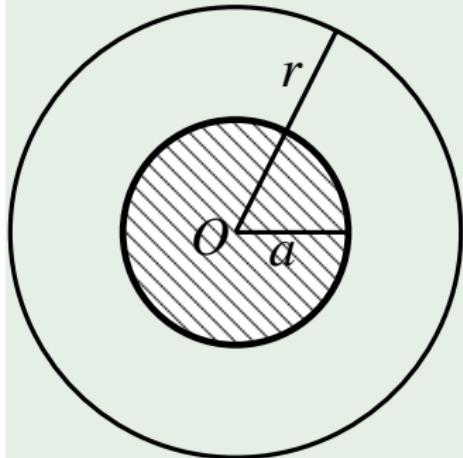
$$Q_{\text{int.}} := \sum_{i \in \text{内部}} q_i = S \text{ の内部にある電荷の和.}$$

連続的な電荷分布の場合は, 和を積分に置き換えて,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0}, \quad Q_{\text{int.}} := \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (19)$$

ただし,  $V$  は  $S$  の内部の領域. (証明終)

## 例 1: 一様な球状電荷分布



原点  $O$ を中心とする半径  $a$  の球の内部に電荷が一様に分布しているとする。全電荷を  $Q$ ,  $r \leq a$  での電荷(体積)密度を  $\rho$  とすると,

$$Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho. \quad (20)$$

中心  $O$ , 半径  $r(> a)$  の球面を  $S$  としてガウスの法則を適用すると,

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (21)$$

対称性から,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は動径方向を向き,  $S$  上では一定の大きさ  $E(r)$  を持つから,

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r) \quad (22)$$

よって,

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad r > a. \quad (23)$$

(中心に点電荷  $Q$  があるときと同じ。)

$r < a$  のときは、ガウスの法則は、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \quad (24)$$

左辺は上と同じで、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r). \quad (25)$$

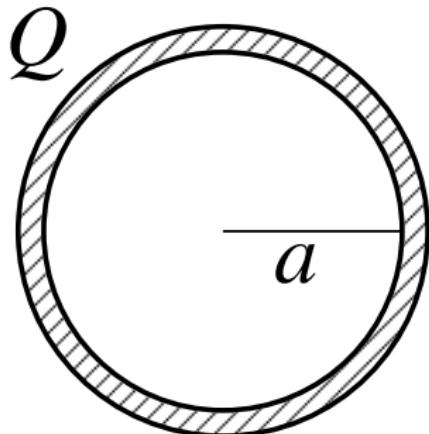
よって、

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{a^3} r. \quad (26)$$

まとめると、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{a^3}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}, & r > a \end{cases} \quad (27)$$

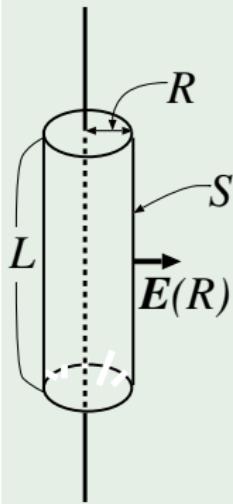
半径  $a$  のうすい球殻上に一様に分布した電荷 (全電荷  $Q$ )



$$E(r) = \begin{cases} \boxed{\phantom{000}}, & r < a \\ \boxed{\phantom{000}}, & r > a \end{cases}$$

## 例 2: 一様な直線状電荷分布 (cf. §§ 2. 3. 4 例 2)

電荷の線密度を  $\lambda$  とし、直線電荷を中心とする半径  $R$ 、長さ  $L$  の円柱の表面  $S$  を考える。 $E(r)$  は中心軸に垂直で、軸対称性より、中心軸からの距離  $R$  のみの関数のはず。ガウスの法則より、



$$\int_S \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}, \quad (28)$$

$$\text{左辺} = E(R) \int_{S \text{の側面}} dS = 2\pi R L E(R).$$

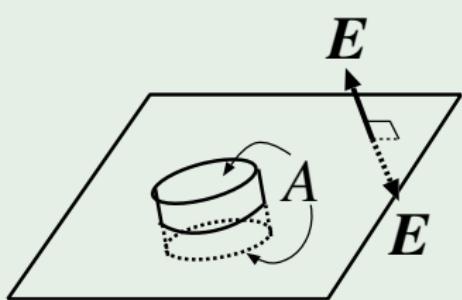
よって、

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (29)$$

(§§ 2. 3. 4 例 2 と同じ結果)。

### 例3: 一様な平面状電荷分布

無限に広い一様な平面電荷分布(電荷の面密度 $\sigma$ )を考える。電場は面に垂直で面の上下で反対向き。また、面上の位置によらない。面を垂直に貫く円柱(底面積 $A$ )を考え、その表面 $S$ についてガウスの法則を用いると、



$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (30)$$

側面は積分に寄与しないから、底面での電場の大きさを $E$ とすれば、

$$E A(\text{上面}) + E A(\text{下面}) = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (31)$$

よって、

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (32)$$

面からの距離にもよらない一様な場。

# 静電場内の釣り合い: アーンショウ (Earnshaw) の定理

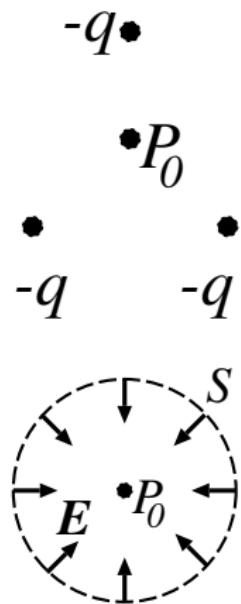
静電場内で電荷のない場所では、安定な釣り合い点はない。

証明のアイデア: 安定な釣り合い点の近傍では復元力が働くことを用いる。

証明: 静電場内でクーロン力が釣り合う点  $P_0$  を考える。この点に正の試験電荷 (test charge, 静電場を変えないような仮想的な点電荷)  $q_0 (> 0)$  を置く。この点が安定ならば、 $q_0$  の位置を少しずらすと復元力が働く。 $P_0$  を囲む仮想的な小さな面  $S$  を考えると、 $S$  上では常に  $P_0$  方向 (内向き) の電場  $E$  があるはず。このとき、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} < 0. \quad (33)$$

つまり、ガウスの法則より  $S$  内には負の電荷がなければならない。 $S$  を無限小にとると、 $P_0$  に負の電荷がなければならぬことになる。



従って、電荷のない場所では安定な釣り合い点はない。(証明終)

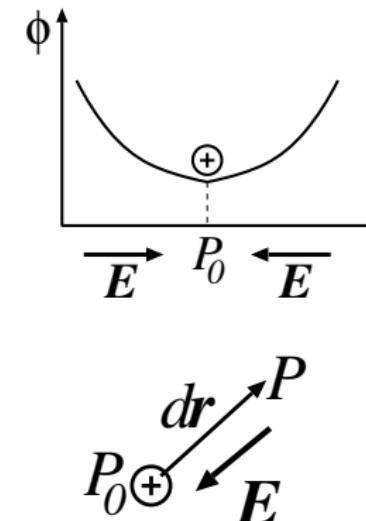
ポテンシャルについて考えると、釣り合いの点  $P_0$  では、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$  で、 $\phi$  は極小、極大、または鞍点となる。さらに、

$\phi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  で、安定な釣り合いの点からどの方向に向かってこの積分をしても、 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} < 0$  であるから、 $\phi(P) > \phi(P_0)$  となり、 $P_0$  の近傍では  $\phi$  は増える。つまり、安定な釣り合いの点では極小値をとる。 $q_0 < 0$  の場合は極大となる。逆に、ポテンシャルが極小または極大になる点は、安定な釣り合いの点である。

電荷のない場所では安定な釣り合いの点がないということは、

## アーンショーの定理(ポテンシャル版)

電荷のない領域では静電ポテンシャルは極小値も極大値もとらない。



## 2.5.3 ガウスの定理

ベクトル場の divergence(発散)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{スカラー量}) \quad (34)$$

( $\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}$  と書くこともある。)

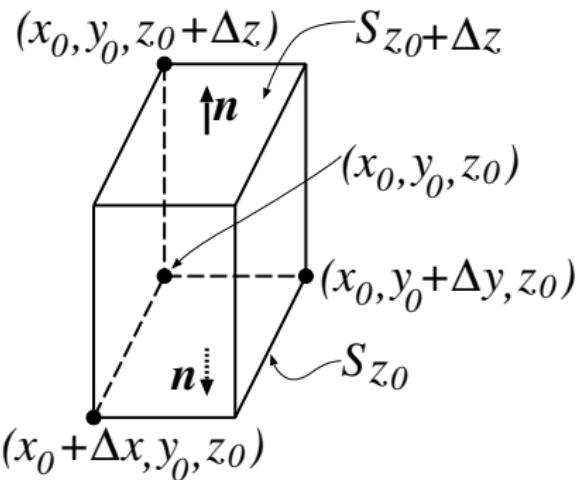
ガウスの定理

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV \quad (35)$$

(左辺は閉曲面  $S$  についての面積分で、右辺は  $S$  囲まれた領域  $V$  での体積積分である。)

証明のアイデア:  $V$  を小さな直方体に分割する。

証明: 図のような小さい直方体  $V_0$  を考える。この直方体の表面  $S_0$  を通るベクトル場  $A$  の流束を考えよう。まず、 $z$  軸に垂直な面  $S_{z_0}$ (下面) と  $S_{z_0+\Delta z}$ (上面) について考える。 $S_{z_0}$  を通る流束は(法線ベクトルの向きに注意して),



$$-\int_{S_{z_0}} A_z(x, y, z_0) dx dy. \quad (36)$$

$S_{z_0 + \Delta z}$  を通る流束は

$$\int_{S_{z_0 + \Delta z}} A_z(x, y, z_0 + \Delta z) dx dy. \quad (37)$$

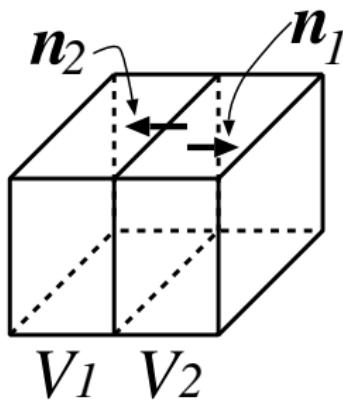
これらの和は ( $\Delta V_0$  を小直方体の体積として),

$$\begin{aligned} & \int \{A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0)\} dx dy \\ & \simeq \int \frac{\partial A_z(x, y, z_0)}{\partial z} \Delta z dx dy \simeq \frac{\partial A_z(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V_0. \end{aligned} \quad (38)$$

$x$  軸,  $y$  軸に垂直な面についても同様. よって, 小直方体の表面から出る流束は,

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} & \simeq \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V_0 \\ & = (\nabla \cdot \mathbf{A})|_{\mathbf{r}=(x_0, y_0, z_0)} \Delta V_0. \end{aligned} \quad (39)$$

ある点での  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  はその点の近傍での単位体積あたりの外向きの流れ(わき出し)を表わす.



次に**流束の分割**を考える。図のような2つの小直方体  $V_1, V_2$  を考える。 $V_{1(2)}$  の表面  $S_{1(2)}$  の流束は、

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1, \quad (40)$$

$$\int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2. \quad (41)$$

$V_1$  と  $V_2$  を合わせたものを  $V_{1+2}$ , その表面を  $S_{1+2}$  とする,  $V_1$  と  $V_2$  の境界面での面積分は打ち消し合うから ( $n$  が逆向き),

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{1+2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (42)$$

よって,

$$\int_{S_{1+2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1 + \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2.$$

一般の(小さくない)領域  $V$  を小直方体に分割すると、 $V$  の表面を  $S$  として、( $\Delta V_i$  は  $i$  番目の中直方体の体積)

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (\text{体積積分}) \quad (43)$$

(証明終)

## 2.5.4 ガウスの法則(微分形)

積分形のガウスの法則は

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (44)$$

これは、閉曲面  $S$  上の電場とその内部の電荷との関係を表わす。一般に電荷と面は離れていてもよいから(cf. §§2.5.2 の例)，遠隔相互作用の考え方。これを近接相互作用の形に書き直すことができる。

### 微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (45)$$

証明のアイデア: ガウスの定理を用いる。

証明: ガウスの定理を用いると,

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV. \quad (46)$$

従って、式(44)は、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (47)$$

任意の領域  $V$  でこれが成り立つから、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (48)$$

(証明終)

点  $r$  での電荷密度が同じ点  $r$  での電場の“微分”を決定していると考えられるから、近接相互作用の考え方になっている。

例えば、 $E_x$  の変化だけを考えると ( $E_y, E_z = \text{const.}$ ),

$$\begin{aligned} E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) &\simeq \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) \Delta x = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0} \Delta x. \end{aligned} \quad (49)$$

すなわち,

$$E_x(x + \Delta x, y, z) \simeq E_x(x, y, z) + \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0} \Delta x. \quad (50)$$

## 例 1: 一様な球状電荷分布

§§2. 5. 2 の例 1 の電場は微分形のガウスの法則を満たしている.

電荷密度は,

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (51)$$

で,

電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, & r > a, \quad Q = 4\pi a^3 \rho / 3 \end{cases} \quad (52)$$

であった。 $r < a$  では、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (53)$$

$r > a$  では、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0 \quad (54)$$

ただし、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \boxed{\phantom{000}}$$

等を用いた。

# まとめ: 静電場の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (55)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (56)$$

式(55)は  $\rho, \mathbf{E}$  が時間に依存しているときも正しい。(理由は第5章で。)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}$$