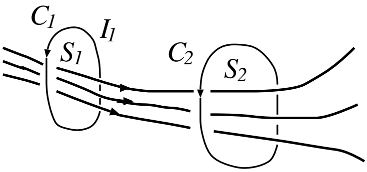
4.2 インダクタンス

電磁気学詳論 I (2019)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 4 章 電磁誘導

4.2.1 相互インダクタンス



2 つの回路 C_1，C_2 を考える．C_1 に電流 I_1 を流すと磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$(ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_1$) が生じる． このとき，C_2 を貫く磁束 Φ_{21} は，I_1 に比例する．

相互インダクタンス (相互誘導係数)

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \,, \;\; M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \,. \tag{1}$$

$\because$

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot d\boldsymbol{S}_2 = \int_{S_2} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_1) \cdot d\boldsymbol{S}_2 = \oint_{C_2} \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}_2) \cdot d\boldsymbol{r}_2 \tag{2}$$

$\Leftarrow$ (3. 3. 24)

$$= \oint_{C_2} \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \right) \cdot d\boldsymbol{r}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \right) I_1$$

注) 2 つの回路の形状や相対的配置のみに依る.

逆に C_2 に電流 I_2 を流すと, C_1 を貫く磁束は, (I_2 の作る磁場を $\boldsymbol{B}_2$, ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}_2$ として)

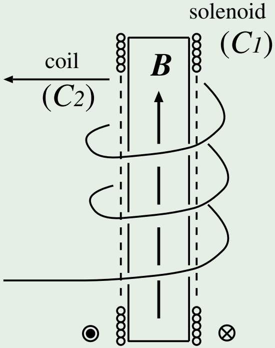
$$\begin{aligned}\Phi_{12} =& \int_{S_1} \boldsymbol{B}_2 \cdot d\boldsymbol{S}_1 = \int_{S_1} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_2) \cdot d\boldsymbol{S}_1 = \oint_{C_1} \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}_1) \cdot d\boldsymbol{r}_1 \\ =& \oint_{C_1} \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \right) \cdot d\boldsymbol{r}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{r}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \right) I_2 \\ =& M_{12} I_2\end{aligned} \tag{3}$$

つまり,

相互インダクタンスの対称性

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{r}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = M_{21} (=: M)\,. \tag{4}$$

例 1: ソレノイドに巻いたコイル



ソレノイド (C_1) の断面積 S，巻数 N_1，長さ ℓ，電流 I_1 とし，コイル (C_2) の巻き数を N_2 とする．

$$M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{\ell} (= M_{12})\,. \tag{5}$$

(3. 3. 53) より，$B = \mu_0(N_1/\ell)I_1$．ソレノイドの磁束は BS で，これは全てコイルを N_2 回貫く．

$$\Phi_{21} = N_2 BS = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{\ell} I_1\,. \tag{6}$$

よって，式 (5) を得る．(M_{12} を直接計算することは難しいが，式 (4) より，$M_{12} = M_{21}$ となる．)

インダクタンスの単位

$$1\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} =: 1\,\mathrm{H}\ (\text{ヘンリー})\,. \tag{7}$$

回路間の電磁誘導

電流 I_1 が変化すると,

$$\Phi_{21}(t) = MI_1(t)\,. \tag{8}$$

このために C_2 に生じる起電力は,

$$\phi_{\mathsf{em},21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}\,. \tag{9}$$

$\Rightarrow$ C_2 にも電流が流れる.(逆も同様.)

4.2.2 自己インダクタンス

I_1 による磁束で C_1 自身を貫くものは I_1 に比例する.

自己インダクタンス

$$\Phi_{11} = M_{11} I_1 = L_1 I_1 \quad (L_1 := M_{11}) \tag{10}$$

同様に，$\Phi_{22} = M_{22} I_2 = L_2 I_2$.

回路が 1 つのとき

$$\Phi = LI\,. \quad (\text{常に } L > 0) \tag{11}$$

このとき，回路に生じる起電力は，

$$\phi_{\mathsf{em}} = -L\frac{dI}{dt}\,. \tag{12}$$

すなわち，インダクタンス (コイル) に電流を流そうとすると，逆起電力が生じる.

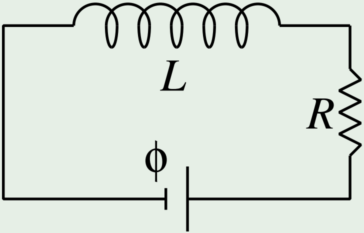
例 1: ソレノイドの自己インダクタンス

(3. 3. 53) より，$B = \mu_0 nI$. 断面積を S とすると，単位長さ当りの L は，

$$L_{\text{単位}} = \frac{\Phi_{\text{単位}}}{I} = \frac{nBS}{I} = \mu_0 n^2 S\,. \tag{13}$$

注) これを式 (1) で $C_1 = C_2$ として求めることはできない．一般には導線の太さを考えて，その中での $\boldsymbol{i}$ を用いて計算する必要がある．

例 2: RL 回路



回路中の全起電力は式 (12) より，$\phi - L(dI/dt)$. オームの法則より，

$$RI(t) = \phi - L\frac{dI}{dt}\,. \tag{14}$$

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{\phi}{L}\,. \tag{15}$$

$\phi/L = 0$ のときの解は，$ae^{-Rt/L}$. これに定数 b を加えて，

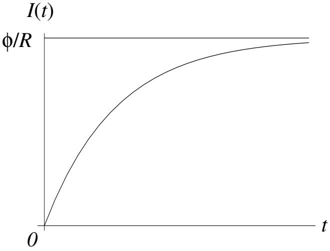
$$I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + b\,. \tag{16}$$

式 (15) に代入して，

$$\frac{R}{L}b = \frac{\phi}{L} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\phi}{R} \quad \Rightarrow \quad I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\phi}{R}\,. \tag{17}$$

$I(0) = 0$ とすると，$a = -\phi/R$．よって，

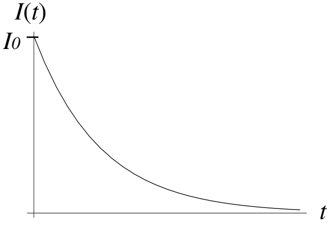
$$I(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{18}$$



$\tau := L/R$ を緩和時間という．

$I(0) = I_0$ で $\phi = 0$ のときは，式 (17) より，

$$I(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{19}$$



例 3: 変圧器 (トランス) の原理

§§4. 2. 1 の例 1 で，ソレノイド (C_1) に外部起電力 ϕ_1 を与えたとする．

$$\phi_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0\,. \quad \text{(電位の一意性)} \tag{20}$$

このとき，コイル (C_2) に誘導される起電力 $\phi_{\mathrm{em},21}$ は式 (9),

$$\phi_{\mathrm{em},21} = -M \frac{dI_1}{dt}\,.$$

よって，

$$\frac{\phi_{\mathrm{em},21}}{\phi_1} = -\frac{M}{L_1}\,. \tag{21}$$

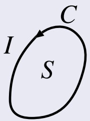
式 (5)，(13) を用いると，

$$\frac{\phi_{\mathrm{em},21}}{\phi_1} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S/\ell}{\mu_0 (N_1/\ell)^2 S\ell} = -\frac{N_2}{N_1}\,. \tag{22}$$

すなわち，C_2 に発生する起電力は巻数の比に比例する．(電圧が自由に変えられる．交流の利点．)

4.2.3 インダクタンスのエネルギー

インダクタンスのエネルギー (1 つの回路の場合)



回路 C に電流 I が流れているとき，

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \,. \tag{23}$$

証明のアイデア: 式 (4. 1. 30) を用いる.

証明: 式 (4. 1. 30) より，

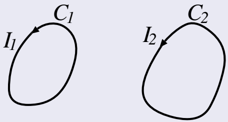
$$U = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV = \frac{1}{2}I\oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{24}$$

$\Leftarrow$ ストークスの定理

$$= \frac{1}{2}I\int_S \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}I\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}LI^2 \,.$$

Φ は C を貫く磁束で、式 (11) を使った. (証明終)

インダクタンスのエネルギー (2 つの回路の場合)



$$U = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \,. \qquad (25)$$

証明: 式 (4. 1. 30) より,

$$U = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV = \frac{1}{2}I_1 \oint_{C_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)\cdot d\boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{2}I_2 \oint_{C_2} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\cdot d\boldsymbol{r}_2$$

(C_1 を貫く磁束) (C_2 を貫く磁束)

$$= \frac{1}{2}I_1(\Phi_{11} + \Phi_{12}) + \frac{1}{2}I_2(\Phi_{21} + \Phi_{22})$$

(Φ_{1j}, Φ_{2j} は I_j による磁束)

$$= \frac{1}{2}I_1(L_1 I_1 + M I_2) + \frac{1}{2}I_2(M I_1 + L_2 I_2) = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \,. \qquad (26)$$

(証明終)

例 1: ソレノイド

単位長さ当りのエネルギーは,

$$U_{\text{単位}} = \frac{1}{2} L_{\text{単位}} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S I^2 \,. \qquad \text{cf. (4. 1. 32)} \tag{27}$$

逆に (4. 1. 32) からソレノイドの $L_{\text{単位}}$ を求めることもできる.

自己インダクタンスと相互インダクタンスの関係

$$L_1 L_2 > M^2 \,. \tag{28}$$

証明のアイデア: 回路に電流を流すとき，必ず仕事 (> 0) をするから，回路のエネルギーは常に正であることを用いる．証明: 2 つの回路のエネルギーは,

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \,. \tag{29}$$

これを変形して，

$$U = \frac{1}{2}L_1\left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2\,. \tag{30}$$

$U > 0$ より，

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} > 0 \implies L_1L_2 > M^2\,. \quad (L_1 > 0) \tag{31}$$

(証明終)

$$M = k\sqrt{L_1L_2}\,,\ |k| < 1 \text{ (結合係数)} \tag{32}$$

と書くこともできる.