2.9　静電エネルギー

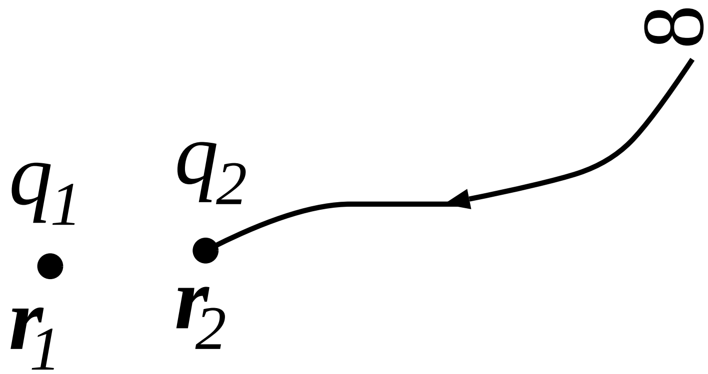
2.9.1　電荷分布のエネルギー

- 点電荷系のエネルギー

○ 点電荷対のエネルギー

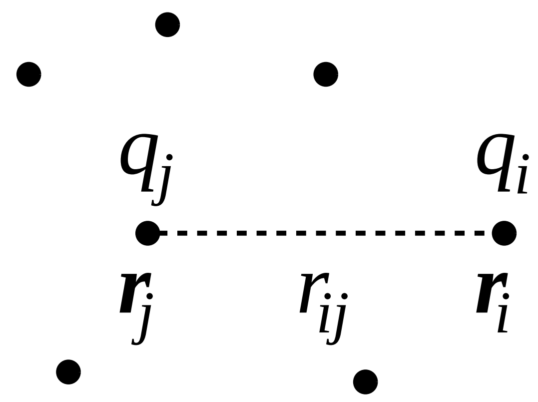
無限遠から q_2 を $\boldsymbol{r}_2$ まで移動させるのに必要なエネルギーは (q_1 は固定)，式 (2. 4. 6) で $r_A \to \infty$，$r_B = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = r_{12}$，$q \to q_1$ として,

(1)
$$U_e = q_2 w = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} .$$



○ 点電荷が 3 個以上あるとき

1 つの電荷 q_i に働く力は $q_j(j \neq i)$ から受ける力の和であるから，q_i を無限遠から $\boldsymbol{r}_i$ まで運ぶのに必要な仕事は，$q_j(j \neq i)$ と q_i の対のエネルギーの和になる．従って，全静電エネルギーは，



(2) $$U_e = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|.$$

ここで，最初の和，$\sum_{i<j}$ は，すべての対についての和を表わしている．2 番目の和，$\sum_{i\neq j}$ に $\frac{1}{2}$ の因子がかかっているのは，各対について 2 回数えているからである．

また，

(3) $$U_e = \frac{1}{2}\sum_i q_i \left(\sum_{j\neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \right) = \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi_i(\boldsymbol{r}_i)\,.$$

とも書ける．ただし，

$$\phi_i(\boldsymbol{r}_i) \equiv \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

は，q_i 以外の電荷が $\boldsymbol{r}_i$ に作るポテンシャル．

- 連続的な電荷分布の場合

式 (2) で和を積分に置き換えて,

(4)
$$U_e = \frac{1}{2}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)\rho(\boldsymbol{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\, dV_1 dV_2\,.$$

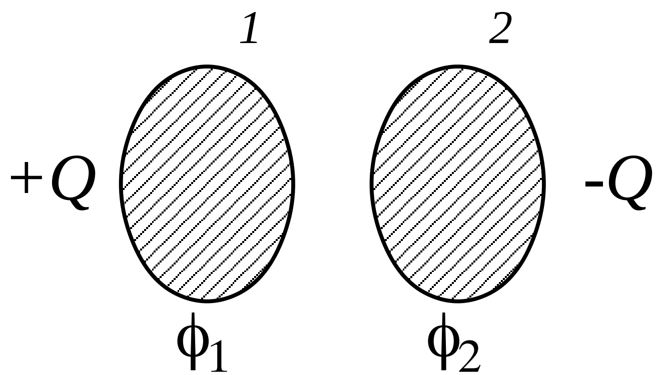
式 (2. 4. 19)

$$\phi(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\, dV_2$$

から,

(5)
$$U_e = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\, dV\,.$$

● 例: コンデンサーのエネルギー



導体外では $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ ゆえ,

(6)
$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2}\int_{\text{導体 1}} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\, dV + \frac{1}{2}\int_{\text{導体 2}} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\, dV \\
&= \frac{1}{2}\phi_1 \int_{\text{導体 1}} \rho(\boldsymbol{r})\, dV + \frac{1}{2}\phi_2 \int_{\text{導体 2}} \rho(\boldsymbol{r})\, dV \\
&\qquad \text{(導体は等ポテンシャル)} \\
&= \frac{1}{2}\phi_1 Q - \frac{1}{2}\phi_2 Q = \frac{1}{2}Q(\phi_1 - \phi_2) \\
&= \frac{Q^2}{2C} \qquad \Leftarrow Q = C(\phi_1 - \phi_2)\,.
\end{aligned}
$$

cf. (2. 8. 26).

2.9.2 電場のエネルギー密度

- エネルギーはどこにあるのか？

○ 静電場ではどこともいえない．

式 (5) では電荷に付随しているように見える．しかし，電磁波は電荷のない空間を伝わり，エネルギーを運ぶ．
$\Rightarrow$ 場に付随させるほうがもっともらしい．

- 近接相互作用の考え方で書き直す．

ポアッソン方程式 $\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$ を用いると，

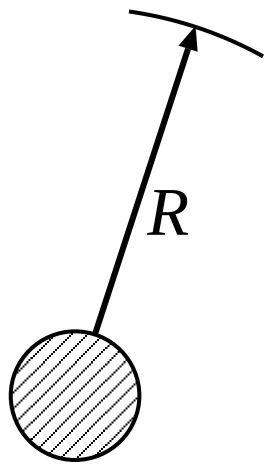
$$
\begin{aligned}
U_e &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\Delta\phi)\phi \, dV \qquad (7) \\
&\Leftarrow \ \phi\Delta\phi = \phi\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)\, dV - \int (\nabla\phi)^2 \, dV\right]
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を用いて,

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{E})\,dV + \int \boldsymbol{E}^2\,dV\right].$$

第 1 項の積分は，ガウスの定理を用いて,

(8) $$\int_V \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{E})\,dV = \int_S \phi\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$



電荷分布が有限の範囲にあるとして，V として十分大きな球 (半径 R) をとる．S は半径 R の球面．十分遠方では点電荷のように見えるはずだから,

$\phi \sim 1/R$，$E \sim 1/R^2$，$dS \sim R^2$．よって，この積分は ($R \to \infty$ として) ゼロ．従って,

(9) $$\boxed{U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})\,dV}$$

場のみで書けた．(これは静電場以外にも拡張できる．)

電場のエネルギー密度は,

(10) $$u_e(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})$$

と書ける．($U_e = \int u_e(\boldsymbol{r})\, dV$)

- 例: 一様に帯電した球

(11) $$\rho(r) = \begin{cases} \rho\,, & r < a\,, \\ 0\,, & r > a\,. \end{cases}$$

§§2. 5. 2 の例 1, 式 (2. 5. 28) から

(12) $$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^3}, & r < a\,, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r > a\,. \end{cases}$$

(13)
$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(r)4\pi r^2\,dr \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^a \frac{r^2}{a^6}4\pi r^2\,dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4}4\pi r^2\,dr\right] \\
&= \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\,. \qquad \text{cf. 式 (2. 8. 28)}
\end{aligned}
$$

($a \to 0$ の極限で電荷 Q の点電荷となるが，このとき，$U_e \to \infty$．)