統計物理学 1 演習　　No.4　　97/10/30

1. **(1)** 半径 R の N 次元球の体積を $V_N = \alpha_N R^N$ と書く。表面積は

$$S_N(R) = \frac{\mathrm{d}V_N(R)}{\mathrm{d}R}$$

によって与えられる。このとき、α_N を以下の関係を使って求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_N^2)\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_N = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-aR^2} S_N(R) \mathrm{d}R.$$

ガンマ関数を使ってよい。

(2) 単原子理想気体の温度 T、圧力 P、化学ポテンシャル μ をエネルギー E、体積 V、原子数 N の関数として求めよ。ただし、エントロピーが

$$S(E,V,N) = Nk_B \left(\ln \frac{V}{NV_0} + \frac{3}{2} \ln \frac{E}{NE_0} \right)$$

の形に与えられていることを使うこと。k_B は Boltzmann 定数、V_0, E_0 は定数である。さらに、T と P の表式から E を消去して状態方程式を導け。

(3) エネルギーが $\pm\epsilon$ のいずれかをとる 2 準位系が N 個あるとしよう。N_+ 個が エネルギー ϵ を、N_- 個がエネルギー $-\epsilon$ をとっているとすると、全エネルギーは $E = \epsilon N_+ - \epsilon N_-$ になる。もちろん、$N = N_+ + N_-$ である。

(a) 全エネルギーが E になるような状態の数 $W(E)$ を求めよ。

(b) エントロピーを

$$S(E) = k_B \ln W(E)$$

から計算せよ。N が大きいとして Stirling の公式を使うこと。

(c) (2) と同様にして、温度 T を全エネルギー E の関数として求めよ。

2(1) ある閉じた系を考える。この系は互いに熱的平衡にある 2 つの部分系からできているとする。この閉じた系のエネルギーは一定値 E である。この閉じた系のエントロピー S はとりうる最大の値を持つ。今、それぞれの部分系のエントロピーとエネルギーを $S_i, E_i\,(i=1,2)$ とするとき、

$$\frac{dS_1}{dE_1} = \frac{dS_2}{dE_2}$$

となることを示せ。(ヒント：$S = S_1(E_1) + S_2(E_2),\, E = E_1 + E_2$)

(2) 絶対温度 T を

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$$

と定義する。前問の結果から、平衡にある 2 つの系の温度は等しい。ここで、上の 2 つの部分系が平衡にないとしよう。すなわち、それらの温度 T_1、T_2は互いに異なる。全系のエントロピー S の時間微分が正であることを用いて、エネルギーは温度の高い系から低い系へ移行することを示せ。

(3) ある閉じた系をいくつかの部分系に分割し、a 番目の部分の質量、全エネルギー、(巨視的) 運動量を M_a、E_a、$\boldsymbol{P}_a$とする。各部分系のエントロピーは、その系の全エネルギーと運動エネルギーの差の関数のはずである。したがって、全系のエントロピーは

$$S = \sum_a S_a \left(E_a - \frac{P_a^2}{2M_a} \right)$$

と書ける。平衡状態では、$\boldsymbol{P}_a$の関数として S は極値をとる。ただし、全運動量および全角運動量が一定という条件、すなわち

$$\sum_a \boldsymbol{P}_a = \text{一定}, \quad \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{P}_a = \text{一定}$$

がつく。ラグランジュの未定乗数法を用いて、全ての部分系が共通の速度および角速度を持つことを示せ。

(4) エントロピーが単に極値をとるだけでなくそれが極大値であることから、温度が正であることを示せ。