統計物理学 1 演習　　No.2　　97/10/16

1. 確率変数 x の関数 $f(x)$ の平均は、

$$\langle f(x)\rangle = \int f(x)P(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

で与えられる。ここで、x の確率分布 $P(x)$ は、非負 $(P(x) \geq 0)$ で、規格化条件

$$\int P(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2}$$

を満たす。x と $x + \mathrm{d}x$ の間の値をとる確率は $P(x)\mathrm{d}x$ で与えられる。特に、$\langle x^m\rangle = \mu_m$は m 次のモーメントと呼ばれる。μ_1は x の平均であり、

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle = \mu_2 - \mu_1^2 \tag{3}$$

を x の分散という。

(1) x を偏りのない立方体のサイコロの目の数であるとしたときの、平均と分散を求めよ。

(2) 袋の中に n 個の玉が入っていて、1 から n までの番号が書いてある。ランダムに玉を取り出した時に、書いてある数字の平均と分散を求めよ。

(3) 一様分布

$$P(x) = 0 \qquad \text{for} \quad |x| > a, \qquad\qquad P(x) = \frac{1}{2a} \qquad \text{for} \quad |x| < a \tag{4}$$

の全てのモーメントを求めよ。

(4) x の分布が

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2v}} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{5}$$

で与えられる Gauss 分布であるとき、$P(x)$ が規格化されていること $(\mu_0 = 1)$ を積分することにより示せ。また、任意の正整数 n に対して$\mu_{2n+1} = 0$ 及び$\mu_{2n} = v^n(2n-1)!! = v^n(2n-1)(2n-3)\cdots 1$ を示せ。

(5) 偏りのない立方体のサイコロを独立に 2 回振ったときの目の数の合計を X とする。X の平均と分散を求めよ。

(6) それぞれが平均 0、分散 v の Gauss 分布に従う 2 個の独立な確率変数 x_1 と x_2 があるとき、$X = x_1 + x_2$の平均と分散を求めよ。

2. 左右対称な箱に分子 N 個からなる気体を入れる。一つの分子に注目すると、左半分にいる確率と右半分にいる確率はそれぞれ $1/2$ と考えられる。N はマクロな系では 10^{24}ぐらいであろう。

(1) すべての分子に関する左右の配置の総数 W はいくらか。

(2) 左に n 個、右に $N-n$ 個となる配置の数 G はいくらか。

(3) $N = 10, 100, 1000$ について、$\log N!$ を 1.1.(6) で導いた Stirling の公式を用いて計算し、正しい値 (Mathematica 等を用いて計算せよ。) と比較せよ。

(4) Stirling の公式を用いて G の最大値 $G_{\max}$ の対数を求めよ。

(5) $N \sim 10^{24}$ として、$\log W$ と $\log G_{\max}$ が非常に良い精度で一致していることを示せ。

(6) 1.2.(3) の結果が n の全領域で正しいとして、左右のバランスが 10^{-10} 以上崩れる確率、すなわち

$$\left|\frac{n-(N-n)}{n+(N-n)}\right| \geq 10^{-10}$$

となる確率を概算せよ。ただし、

$$\int_z^\infty e^{-t^2}dt \simeq \frac{1}{2z}e^{-z^2} \quad (z \gg 1)$$

を用いよ。