統計物理学 1 演習　　No.1　　96/10/09

1. 連続な実関数を $f(x)$ とするとき積分

$$F(N) = \int_a^b \mathrm{e}^{Nf(x)}\mathrm{d}x, \quad a < 0 < b$$

を考えよう。$N \to \infty$ でのこの積分の振る舞いを知ることは、物理学の多くの問題において重要である。$f(x)$ の性質として次のことを仮定する。

(α) $f(x)$ は 原点 $x = 0$ のまわりで Taylor 展開可能である。$f(0) = f'(0) = 0$、$f''(0) < 0$ であり、$x \neq 0$ なら $f(x) < 0$ になっている。 $x \to a, b$ では $f(x) \to -\infty$。

(β) $N \geq 1$ で積分 $F(N)$ は収束。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 上のような条件を $f(x)$ が満たしているとき、$\mathrm{e}^{Nf(x)}$ はおおよそどのような形の関数になるか、概形を図示せよ。さらに、$N \to \infty$ ではどのような振舞いが起こるかを説明せよ。

(2) 正の数 ϵ が与えられたとき、$\delta > 0$ が存在して、$-\delta \leq x \leq \delta$ に対し、

$$\mid f(x) - \frac{1}{2}x^2 f''(0) \mid < \epsilon x^2$$

となることを証明せよ。さらに、$N > 0$ で次の不等式が得られることを示せ。

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{Nx^2(f''(0)-2\epsilon)/2}\mathrm{d}x < \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{Nf(x)}\mathrm{d}x < \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{Nx^2(f''(0)+2\epsilon)/2}\mathrm{d}x$$

(3) 任意の $\delta > 0$ (ただし $a < -\delta, \delta < b$) に対し、正の数 g が存在し、区間 $a < x \leq -\delta$ と $\delta \leq x < b$ において $f(x) \leq -g$ となることを示せ。さらに、$N > 1$ で次の不等式が得られることを示せ。

$$\int_a^{-\delta} \mathrm{e}^{Nf(x)}\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{b} \mathrm{e}^{Nf(x)}\mathrm{d}x < \mathrm{e}^{-(N-1)g} \int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x.$$

(4) (2) と (3) で得た不等式から $N \to \infty$ での $F(N)$ の振る舞いとして

$$F(N) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(0)}}$$

を導け。

(5) ガンマ関数

$$\Gamma(N+1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s} s^N \mathrm{d}s$$

の $N \to \infty$ における振舞いについて考えよう。まず、変数変換 $s = N(1+x)$ を行うと、ガンマ関数が

$$\Gamma(N+1) = \mathrm{e}^{-N} N^{N+1} \int_{-1}^{\infty} \{\mathrm{e}^{-x}(1+x)\}^N \mathrm{d}x$$

と書けることを示せ。

(6) (5) で導いた積分の中の関数 $\mathrm{e}^{-x}(1+x)$ は $x = 0$ で極大をもつ。ここで、$N \to \infty$ の極限を考える。(4) の結果を使って、Stirling の公式

$$\Gamma(N+1) \sim \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-N} N^{N+(1/2)}, \quad N \to \infty$$

を導け。

2. **(1)** 1.(5) の定義式を用いて、部分積分により

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

を示せ。

(2) 1.(5) の定義式を用いて、

$$\Gamma(1) = 1,$$

を示せ。これにより非負の整数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることがわかる。さらに

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

を示せ。

(3) Stirling の公式を用いて、N が大きいときに、二項分布

$$f(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{(N-n)}$$

が Gauss 分布

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad \mu = Np,\ \sigma^2 = Np(1-p)$$

で近似できることを示せ。ただし、Np も大きいとする。