量子力学 3 演習 No.9 (99/12/9)

1. No.4 の問題 3 の結果を用いて次の問に答えよ。
   (a) Schrödinger 表示での状態を $|i,t\rangle_S = c_i^S(t)|i\rangle$ としたとき、時間発展の係数 $c_i^S(t)$ を決定せよ。($t<0$ で $c_i(t)=0$ に注意。)
   (b) $c_i^S(t)$ のフーリエ成分$\tilde{c}_i^S(\omega)$ を求め、

$$|\tilde{c}_i^S(\omega)|^2 = \frac{\hbar^2}{2\pi}\frac{1}{\{E-(E_i^{(0)}+\delta E_i)\}^2+\Gamma_i^2/4}$$

   となることを示せ。ただし、$E=\hbar\omega$で、$E_i^{(0)}$は非摂動エネルギーである。(すなわちΓ_iは半値幅になっている。)
2. 原子内電子からの光子の吸収・放出について考える。簡単のため水素様原子を考え、反応に関わる電子は 1 つだけであるとする。
   (a) 古典的な輻射場は$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(\mathrm{abs})}+\boldsymbol{A}^{(\mathrm{emis})} = A_0\boldsymbol{\epsilon}_\lambda e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} + A_0^*\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ で与えられるとする。ただし、$|\boldsymbol{\epsilon}_\lambda|^2=1$, $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda\cdot\boldsymbol{k}=0$, $c^2\boldsymbol{k}^2=\omega^2$で$\lambda$は偏極を表わす。No.4 の問題 2 からわかるように、第 1 項は $E=\hbar\omega$の光子の吸収、第 2 項は放出に対応している。系が体積 V の立方体の中にあるとし全光子数を N とすると、$A_0 = c\sqrt{2\pi\hbar N/\omega V}$となることを示せ。(ヒント：電磁場のエネルギーを計算せよ。)
   (b) 初期状態では原子が状態 i で光子が N 個あり、終状態では原子が状態 f になり光子が $N\pm1$ 個になったとする。単位時間あたりの遷移確率を求めるには行列要素 $\langle f,N\pm1|\boldsymbol{A}^{(\mathrm{abs,emis})}\cdot\boldsymbol{p}|i,N\rangle$ を計算する必要がある。電磁場の量子論によれば、

$$\langle f,N-1|\boldsymbol{A}^{(\mathrm{abs})}\cdot\boldsymbol{p}|i,N\rangle = c\sqrt{\frac{2\pi\hbar N}{\omega V}}\langle f|e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\epsilon}_\lambda\cdot\boldsymbol{p}|i\rangle$$

$$\langle f,N+1|\boldsymbol{A}^{(\mathrm{emis})}\cdot\boldsymbol{p}|i,N\rangle = c\sqrt{\frac{2\pi\hbar(N+1)}{\omega V}}\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*\cdot\boldsymbol{p}|i\rangle$$

   となる。$N=0$ のときの放出過程 (自発放射) が可能なことが古典論との著しい違いである。以下、この場合について考えよう。
   運動量$\hbar k$ の光子が放出されるときの状態密度が$\rho d^3\boldsymbol{k} = V/(2\pi)^3\, d^3\boldsymbol{k}$となることを示し、フェルミの黄金則を用いて単位時間あたりの微分遷移確率 $dw/d\Omega$を $\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*\cdot\boldsymbol{p}|i\rangle$ で表わせ。($d\Omega$は光子の放出される微小立体角である。)
   (c) 双極子近似を用いて (単位時間あたりの) 遷移確率が

$$w = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{4}{3}\frac{\omega^3}{c^2}|\langle f|\boldsymbol{x}|i\rangle|^2$$

   となることを示せ。w の次元が (時間)$^{-1}$であることを確かめよ。(λについての和は、直線偏極を用いて計算せよ。)
   (d) $\langle f|\boldsymbol{x}|i\rangle$ についてパリティー選択則を述べよ。
   (e) $2p(j_z=m_i)\to 1s$ 遷移について $|\langle f|\boldsymbol{x}|i\rangle|^2$の角度部分を評価し、それが m_iに依存しないことを確かめよ。
   (f) 以下、水素原子を考える。$2p\to 1s$ の全遷移確率を求め、それを寿命に換算せよ。
   (g) $2p$ と $1s$ のエネルギー差と $2p$ 状態の幅を比較せよ。
   (h) $2p$ 状態の幅と温度 T でのドップラー効果によるエネルギーの広がりを比較せよ。(簡単のため水素分子の回転、振動は無視する。)