量子力学 3 演習 No.8 (99/12/2)

1. $2j+1$ 個の状態ベクトル $|\psi;j,m\rangle$ $(m=j,\cdots,-j)$ が $\hat{\boldsymbol{J}}$ の作用に対して、

$$\begin{aligned}\hat{J}^3|\psi;j,m\rangle &= \hbar m|\psi;j,m\rangle \\ \hat{J}^{\pm}|\psi;j,m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|\psi;j,m\pm1\rangle\end{aligned}$$

と変換するとき、これらの状態は角運動量 j の表現をなしているという。(ただし、$J^{\pm}=J^1\pm iJ^2$、ψは角運動量以外の量子数をまとめて表わすものとする。) 同様に、$2j+1$ 演算子$\hat{O}_{j,m}$ $(m=j,\cdots,-j)$ が、交換関係

$$\begin{aligned}[\hat{J}^3,\hat{O}_{j,m}] &= \hbar m\hat{O}_{j,m} \\ [\hat{J}^{\pm},\hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,\hat{O}_{j,m\pm1}\end{aligned}$$

を満たすとき、これらの演算子は角運動量 j をもつテンソル演算子であるという。

(a) m 選択則

$$\langle\varphi;j_2,m_2|\hat{O}_{j,m}|\psi;j_1,m_1\rangle=0\,,\quad m_2\neq m+m_1$$

を導け。

(b) スカラー演算子$\hat{S}$は $[\hat{\boldsymbol{J}},\hat{S}]=0$ を満たすから $j=0$ のテンソル演算子であるといえる。($\hat{\boldsymbol{J}}$は回転の生成子であることを思い出そう。) 行列要素 $\langle\varphi;j,m|\hat{S}|\psi;j,m\rangle$ が m に依存しないことを示せ。$\hat{S}$をハミルトニアンにとった場合、これは何を意味するか。

(c) ベクトル演算子$\hat{\boldsymbol{V}}$は $[\hat{J}^i,\hat{V}^j]=i\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon^{ijk}V^k$ を満たす。$\hat{\boldsymbol{V}}$は $j=1$ の演算子であることを確かめよ。ただし、$\hat{V}_{1,0}=V^3$, $\hat{V}_{1,\pm1}=\mp(\hat{V}^1\pm i\hat{V}^2)/\sqrt{2}(=\mp\hat{V}^{\pm}/\sqrt{2})$ とせよ。

(d) 次の式を示せ。

$$\begin{aligned}\langle\varphi;1,m|\hat{V}^3|\psi;1,m\rangle &= \frac{m}{\sqrt{6}}\langle\varphi;j=1||V||\psi;j=1\rangle \\ \langle\varphi;1,m-1|\hat{V}^-|\psi;1,m\rangle &= \sqrt{\frac{(2-m)(1+m)}{6}}\langle\varphi;j=1||V||\psi;j=1\rangle \qquad (1)\end{aligned}$$

ただし、$\langle\varphi;j'||V||\psi;j\rangle$ は既約行列要素といわれるもので m に依存しない量である。

2. 上の結果は一般の角運動量 j のテンソル演算子に拡張され、行列要素 $\langle\varphi;j_2,m_2|\hat{O}_{j,m}|\psi;j_1,m_1\rangle$ の m,m_1,m_2依存性が決定されることになる。これを Wigner-Eckart の定理と呼ぶ。この定理を以下で導こう。

(a) まず準備として、Clebsch-Gordan 係数の漸化式を考える。j_1,m_1の状態と j_2,m_2の状態を合成して、j,m の状態を作るときの係数が Clebsch-Gordan 係数であった。つまり、$|j_1,j_2;j,m\rangle=\sum_{m_1,m_2}|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j_1,j_2;j,m\rangle$ の右辺最後の因子が Clebsch-Gordan 係数である。両辺に$\hat{J}^{\pm}=\hat{J}_1^{\pm}+\hat{J}_2^{\pm}$を作用させ、左から $\langle j_1,j_2;m_1,m_2|$ をかけることにより、漸化式

$$\begin{aligned}&\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j_1,j_2;j,m\pm1\rangle = \\ &\quad\sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\langle j_1,j_2;m_1\mp1,m_2|j_1,j_2;j,m\rangle + \\ &\quad\sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_2)}\langle j_1,j_2;m_1,m_2\mp1|j_1,j_2;j,m\rangle\end{aligned}$$

を導け。

(b) $\hat{O}_{j_1,m_1}(m_1=j_1,\cdots,-j_1)$ が角運動量 j_1をもつテンソル演算子で、$|\psi;j_2,m_2\rangle(m_2=j_2,\cdots,-j_2)$ が角運動量 j_2の表現をなしているとき、$\hat{O}_{j_1,m_1}|\psi;j_2,m_2\rangle$ は$\hat{\boldsymbol{J}}$の作用に対して、$|j_1,j_2;,m_1,m_2\rangle$ のように変換することを示せ。

(c) このことからテンソル演算子の行列要素の間に (a) と類似の漸化式が成り立つことが期待される。この漸化式を実際に導け。

(d) (a) と (c) の漸化式を比較することにより、Wigner-Eckart の定理

$$\langle\varphi; j_2, m_2|\hat{O}_{j,m}|\psi; j_1, m_1\rangle = \langle j, j_1; m, m_1|j, j_1; j_2, m_2\rangle \frac{\langle\varphi; j_2||O_j||\psi; j_1\rangle}{\sqrt{2j_1+1}}$$

を示せ。ただし、既約行列要素 $\langle\varphi; j_2||O_j||\psi; j_1\rangle$ は m, m_1, m_2によらない。

3. Wigner-Eckart の定理を用いて次の問に答えよ。

(a) No.7 の問題 2(c) に表われた行列要素 $\langle\varphi; j_2, m_2|\hat{x}|\psi; j_1, m_1\rangle$ に対する選択則を導け。$j_1 = 0$、$j_2 = 0$ は許されるか。

(b) No.7 の問題 1(c) で与えられた例のように、任意のベクトル演算子の (角運動量固有状態ではさんだ) 行列要素は$\hat{\boldsymbol{J}}$に比例することを示せ。