量子力学 3 演習 No.7 (99/11/25)

1. 弱い一様な磁場中の水素 (様) 原子を考える。No.6 の問題 2 で見たように、スピン軌道相互作用によりエネルギー準位は $j = \ell \pm 1/2$ に分裂する。磁場をかけると準位はさらに分裂する。(Zeeman 効果。) スピン軌道相互作用による分裂に比べて磁場による分裂が十分小さいとして、摂動により準位の分裂の様子を調べよう。
   (a) 一様な磁場 $\mathbf{B}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$ で与えられることを示し、このとき $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ であることを確かめよ。
   (b) ハミルトニアンの $\mathbf{B}$ の 1 次の部分は、$\hat{H}_B = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$、ただし $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (e/2mc)(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}})$ となることを示せ。(スピンの部分は No.6 3(b) の結果である。)
   (c) No.6 2(a) で見たように非摂動ハミルトニアンの固有状態として $\hat{\mathbf{J}}^2$ の固有状態をとることができる。従って、j の決った状態への射影演算子 $\hat{P}_j$ を導入し、$\hat{P}_j \hat{H}_B \hat{P}_j = -\hat{P}_j \hat{\boldsymbol{\mu}} \hat{P}_j \cdot \mathbf{B}$ という演算子を考えればよいことになる。$\hat{P}_j \hat{\boldsymbol{\mu}} \hat{P}_j = (e g_j/2mc) \hat{P}_j \hat{\mathbf{J}} \hat{P}_j$、ただし

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

   となることを示せ。
   (d) 磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ によるエネルギーのずれを求めよ。
   (e) $j = \ell \pm 1/2$、$s = 1/2$ として、角運動量の合成の Clebsch-Gordan 係数を用いてエネルギーのずれを直接計算し前問の結果と比べよ。
2. 前問とは逆に、磁場が強くスピン軌道相互作用を摂動を見做せる場合を考える。磁場は $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ とする。
   (a) よい量子数は何か。
   (b) 磁場によるエネルギーを求め、各準位の縮退の様子を調べよ。($s = 1/2$ とする。) (Paschen-Back 効果。)
   (c) スピン軌道相互作用によるエネルギーのずれを求め、縮退のとける様子を調べよ。(動径部分の行列要素は求めなくてもよい。)
3. 原子内電子と (古典的) 輻射場との相互作用について考える。特に、吸収による離散状態 i から離散状態 f への遷移について調べよう。電磁場はベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = A_0 \boldsymbol{\epsilon} [e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}]$ で与えられるものとする。ただし、$\boldsymbol{\epsilon}^2 = 1$、$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$、$\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2$である。
   (a) No.4 の問題 2 から、単位時間あたりの遷移確率が

$$w_{i \to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2 A_0^2}{m^2 c^2} |\langle f | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{p}} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

   となることを示せ。
   (b) 吸収断面積 $\sigma_{\rm abs}(i \to f)$ を単位時間あたりに吸収されるエネルギーを輻射場のエネルギー流束で割ったもので定義する。輻射場のエネルギー流束を求め、吸収断面積の表式を求めよ。
   (c) 軽い (Z が小さい) 原子ならば、$|\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}| \ll 1$ で $\langle f | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{p}} | i \rangle \simeq \boldsymbol{\epsilon} \cdot \langle f | \hat{\mathbf{p}} | i \rangle$ と近似できることを示し、さらに $\boldsymbol{\epsilon}$ を x 軸方向にとり $\langle f | \hat{p}_x | i \rangle = i m \omega_{fi} \langle f | x | i \rangle$、$(\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar)$ と書けることを示せ。(電気双極子近似。)
   (d) 1 電子につき $\sum_f (2m\omega_{fi}/\hbar) |\langle f | x | i \rangle|^2 = 1$ であることを示し、始状態 i を基底状態としたとき

$$\int d\omega \sum_f \sigma_{\rm abs}(i \to f) = 2\pi^2 c \frac{e^2}{mc^2}$$

   となることを示せ。(ヒント：$\langle i | [x, [x, \hat{H}_0]] | i \rangle$ を考えよ。)