量子力学 3 演習 No.4 (99/10/28)

1. z 軸方向に一様な静磁場 B がある時のポジトロニウムのハミルトニアンのうち、スピンに依存する部分は

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{eB}{m_e c}(S_{1z} - S_{2z})$$

で与えられる。

(a) $B = 0$ のときの固有状態とエネルギー準位を求めよ。

(b) 第 2 項を摂動とみなしエネルギー準位を求めよ。

(c) 今、適切な振動数の振動磁場をかける事により、2 つの $m = 0$ の状態間に (誘導放出あるいは吸収を通じて) 遷移を起こさせようとする。(No.3: 2 参照のこと。) どのような振動数の磁場をどの方向にかけたら良いか。

2. 離散準位 E_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とそれよりも大きい連続準位 E_νからなる系で、摂動

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t}$$

による離散準位から連続準位への遷移について考える。

(a) $t = 0$ で状態が $|n\rangle$ にあったとする。時刻 t で状態がνから$\nu + d\nu$にある確率は $|c_\nu(t)|^2 d\nu$ と表わされる。$c_\nu(t)$ の表式を摂動の 1 次で求めよ。

(b) t がある程度大きいとき、遷移が起こり易いのは E_νが $E_n + \hbar\omega$を中心とした幅$\Delta E_\nu \sim \hbar/t$ の状態であることを確かめよ。

(c) t がある程度大きいとき、単位時間あたりの遷移確率が

$$dw_{n\to\nu} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_\nu - E_n - \hbar\omega)|F_{\nu n}|^2 d\nu$$

と書けることを示せ。だだし、$F_{\nu n} \equiv \langle\nu|\hat{F}|n\rangle$ である。

3. $t = -\infty$ には摂動は無く、それからゆっくりと摂動が加えられるような状況を考える。すなわち、摂動は$\hat{V}(t) = \hat{V}e^{\epsilon t}$ $(\epsilon > 0)$ であるとする。($\epsilon \to 0$ とすれば摂動は時間的に一定となる。)

(a) $t = -\infty$ で状態は $|i\rangle$ にあったとしよう。$n \neq i$ として $c_n(t)$ を 1 次の摂動で求め、$\epsilon \to 0$ で単位時間あたりの遷移確率が $w_{i\to n} = (2\pi/\hbar)\delta(E_n - E_i)|V_{ni}|^2$ となることを示せ。だだし、$V_{ni} \equiv \langle n|\hat{V}|i\rangle$ である。

(b) $c_i(t)$ を摂動の 2 次まで求め、$\epsilon \to 0$ の極限で

$$\frac{\dot{c}_i}{c_i} = \frac{1}{i\hbar}V_{ii} + \frac{1}{i\hbar}\sum_{m\neq i}\frac{|V_{mi}|^2}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon}$$

となることを示せ。

(c)

$$c_i(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\delta E_i - i\frac{\Gamma_i}{2}\right)t\right]$$

と置き、δE_iとΓ_iを決定し、δE_iがエネルギー準位のずれ、$\hbar/\Gamma_i$が $|i\rangle$ の寿命を表わすことを説明せよ。

(d) t が小さいとき、摂動の 2 次までで確率が保存していることを確かめよ。