量子力学 3 演習 No.12 (00/1/20)

1. 球対称ポテンシャルによる散乱を考える。z 軸方向に平面波が入射している。

   (a) 極座標で変数分離すれば Schrödinger 方程式の解は $\psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta) R_{k\ell}(r)$ と書けることを確かめよ。

   (b) 動径関数の満す方程式は

   $$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR_{k\ell}) + \left\{k^2 - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\} R_{k\ell} = 0$$

   となる。ただし、$k^2 = 2mE/\hbar^2$、$U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ である。$V = 0$ のとき、$R_{k\ell}(r) = 2k j_\ell(kr)$ となることを示せ。

   (c) 上の結果を用いて $e^{ikz} = \sum_\ell i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta)$ を示せ。

   (d) V の到達範囲が有限のとき、遠方で

   $$R_{k\ell}(r) \simeq \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)$$

   と書けることを示せ。

   (e) 遠方で

   $$\psi \simeq e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

   となるように A_ℓ を決定せよ。さらに、

   $$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_\ell (2\ell+1)(S_\ell - 1) P_\ell(\cos\theta)$$

   となることを示せ。ただし、$S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ である。(これを部分波展開と呼ぶ。)

   (f) 部分波展開の式を用いて光学定理を証明せよ。

2. 位相のずれ δ_ℓ を Born 近似で計算する表式を求めよう。

   (a) $\chi = rR_{k\ell}$ の満す微分方程式を書け。

   (b) $\chi^{(0)}$ を $V = 0$ のときの解とすると

   $$\chi'(r)\chi^{(0)}(r) - \chi(r)\chi^{(0)\prime}(r) = \int_0^r U\chi\chi^{(0)} dr'$$

   となることを示せ。

   (c) Born 近似ではこの式の右辺で $\chi \simeq \chi^{(0)}$ と置くことができる。さらに、$r \to \infty$ として

   $$\delta_\ell \simeq -k\int_0^\infty U(r) j_\ell^2(kr) r^2 dr$$

   を導け。