量子力学 3 演習 No.11 (00/1/13)

1. ポテンシャルによる散乱を記述する積分方程式は

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}} + \int d^3r' G_+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

と書ける。(No.10 問題 3 参照。) ここで $\boldsymbol{k}_i$ は入射粒子の波数ベクトルである。

(a) $U$ を摂動とみなして、逐次近似によりこの方程式の解を $U$ の 1 次まで求め、散乱振幅が

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_i) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{r}'}V(\boldsymbol{r}')$$

となることを示せ。(Born 近似。) ただし、$\boldsymbol{k}$ は散乱粒子の波数ベクトルである。(散乱振幅はポテンシャルの Fourier 変換になっている。)

(b) 球対称ポテンシャルの場合、$\boldsymbol{k}_i$ および $\boldsymbol{k}$ の関数として散乱振幅が $2k\sin(\theta/2)$ ($k = |\boldsymbol{k}_i| = |\boldsymbol{k}|$、$\cos\theta = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_i/k^2$) にのみ依存することを示せ。また、散乱振幅が実であることも確かめよ。

(c) Born 近似が良い近似であるためには、式 (1) の右辺第 2 項の大きさが右辺第 1 項の大きさより十分に小さいことが条件となる。ポテンシャルのおよぶ距離を $a$ 程度として、この条件が低エネルギーのとき (すなわち $ka \lesssim 1$ のとき) $V \ll \hbar^2/ma^2$、高エネルギーのとき (すなわち $ka \gg 1$ のとき)$V \ll ka\hbar^2/ma^2$ となることを示し、その意味を考えよ。

(d) Fermi の黄金則を用いて微分断面積の表式を求め、Born 近似の結果と比較せよ。

2. 湯川ポテンシャル $V(r) = -V_0 e^{-\alpha r}/\alpha r$ による散乱を考える。

(a) 微分断面積および全断面積を Born 近似で計算せよ。

(b) Born 近似が良い近似であるための条件を求めよ。

(c) 陽子と中性子の相互作用は $V_0 = 10\mathrm{MeV}$、$\alpha^{-1} = 1.3\mathrm{f}m = 1.3\times10^{-13}\mathrm{c}m$ の湯川ポテンシャルで記述されるとしよう。重心系での陽子の運動量が $50\mathrm{MeV}/c$ のとき、陽子–中性子散乱の全断面積を mb の単位で求めよ。ただし、陽子、中性子の質量を $940\mathrm{MeV}$ とせよ。

(d) $V_0/\alpha = ZZ'e^2$ と固定して $\alpha \to 0$ の極限を考えることにより、クーロンポテンシャルによる散乱の微分断面積を求めよ。

3. 光学定理について Born 近似で考察しよう。ポテンシャルは球対称とする。

(a) 問題 1 で求めた (1 次の)Born 近似の散乱振幅は自明な形で光学定理を満していることを確かめよ、

(b) 問題 1 の逐次近似を繰り返すことにより $V$ の 2 次までで散乱振幅を求め (2 次の Born 近似)、光学定理がどのように満されているか調べよ。