量子力学 3 演習 No.10 (99/12/16)

1. 多数の原子と電磁場が熱平衡にあるとする。原子と電磁場 (γ) は $A \leftrightarrow \gamma + B$ という過程でエネルギーをやりとりしている。$(A, B$ は原子の状態を表わす。$)$
   (a) 状態 X にある原子の数を $N(X)$、$w_{\rm abs}$、$w_{\rm emis}$をそれぞれ $B + \gamma \to A$、$A \to B + \gamma$の遷移確率とする。$N(A), N(B), w_{\rm abs}, w_{\rm emis}$の間の釣り合いの式を書け。
   (b) No.9 の問題 2(b) で与えられた式から、$w_{\rm emis}/w_{\rm abs} = (N_{\boldsymbol{k},\lambda} + 1)/N_{\boldsymbol{k},\lambda}$ となることを示せ。ただし、$N_{\boldsymbol{k},\lambda}$は波数$\boldsymbol{k}$、偏極$\lambda$の光子の数を表わす。
   (c) 統計力学によれば、
   $$\frac{N(B)}{N(A)} = \frac{e^{-E_B/k_BT}}{e^{-E_A/k_BT}} = e^{\hbar\omega/k_BT}$$
   である。$(\hbar\omega = E_A - E_B$は光子のエネルギーである。$)$ これと上の結果を用いて $N_{\boldsymbol{k},\lambda} = 1/(e^{\hbar\omega/k_BT} - 1)$ であること示せ。
   (d) ここで、電磁場が任意のエネルギーの光子を放出したり吸収したりできる壁で長さ L の立方体の中に閉じ込められているとしよう。前問の結果を用いて、Planck の輻射法則、
   $$U(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT} - 1}$$
   を導け。ただし、$U(\nu)d\nu$は振動数がνと$\nu + d\nu$の間にある電磁場の単位体積あたりのエネルギーである。
2. z 軸方向に進む平面波で記述される粒子が球対称ポテンシャル $V(r)$ に入射している。ただし、ポテンシャルは遠方で $1/r$ よりも速くゼロになるものとする。十分遠方では波動関数は入射波 (平面波) と散乱波 (球面波) の重ね合わせ
   $$\varphi(\boldsymbol{r}) = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \to \infty) \tag{1}$$
   で書ける。$(f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれる。$)$
   (a) 上の波動関数が時間に依存しない Schrödinger 方程式を $r \to \infty$ で満たしていることを示せ。
   (b) 確率の流れが遠方で
   $$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \to \frac{\hbar k}{m}\left[\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_r|f(\theta)|^2\frac{1}{r^2} + (\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_r)\mathrm{Re}\left\{f(\theta)\frac{e^{ik(r-z)}}{r}\right\} + \cdots\right] \tag{2}$$
   となることを示せ。
   (c) 式 (2) の第 1 項は入射フラックス $j_{\rm inc} = \hbar k/m = v$ を表わし、第 2 項は散乱された粒子の動径方向への流れ $j_{\rm sc,r} = v|f(\theta)|^2/r^2$ を表わしている。
   $$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{\text{単位時間に } d\Omega \text{内に散乱される粒子数}}{\text{単位時間に単位面積に入射する粒子数}}$$
   で微分断面積$\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$を定義すると、
   $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$
   となることを示せ。

(d) 十分大きな球面での式 (2) の積分は、粒子数の保存からゼロのはずである。このことから、光学定理

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{4\pi}{k}{\rm Im}f(0)\,, \quad \text{ただし、} \sigma_{\rm tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

を示せ。

3. 式 (1) の境界条件を持つ波動関数の満す積分方程式について考えよう。

(a) 時間に依存しない Schrödinger 方程式を $(\Delta + k^2)\varphi(\boldsymbol{r}) = U(r)\varphi(\boldsymbol{r})$ と書く。ただし、$k^2 = 2mE/\hbar^2$、$U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ である。$(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$ を満たす Green 関数 $G(\boldsymbol{r})$ を用いると、上の Schrödinger 方程式は積分方程式

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_0(\boldsymbol{r}) + \int d^3r' G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')U(r')\varphi(\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

に帰着することを示せ。ここで、$\varphi_0(\boldsymbol{r})$ は $(\Delta + k^2)\varphi_0(\boldsymbol{r}) = 0$ の解である。

(b) Fourier 変換を用いて $(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$ を解き、Green 関数が

$$G_\pm(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

となることを示せ。

(c) $\varphi_0(\boldsymbol{r}) = e^{ikz}$とし、$G(\boldsymbol{r})$ として外向きの球面波に対応する Green 関数 $G_+(\boldsymbol{r})$ を持ってくれば、式 (1) の境界条件を満たしていることを示せ。さらに $f(\theta)$ の表式を求めよ。