量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.2 (2002/10/10)

1. 水素原子の原子核 (陽子) に外部から飛んで来たニュートリノが衝突し、陽子が反跳を受け速度 $\boldsymbol{v}$ を得た。衝突の時間は十分に短く、衝突中の陽子の変位は無視できる。

   (a) 衝突前の波動関数を $\psi(\boldsymbol{r})$ とすると、衝突後の陽子の静止系での波動関数が $\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$ となることを示せ。ただし、$\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{v}/\hbar$ である。

   (b) 衝突前に基底状態にあったとして、衝突後に励起あるいはイオン化する全確率を求めよ。

2. 時刻 $t$ に依存するハミルトニアン $H(t)$ に対し、状態 $|\psi\rangle$ が $H(t)|\psi\rangle = E(t)|\psi\rangle$ を満す。$|\psi\rangle$ が $t$ に依存しないとき、状態

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} E(t')dt'\right)|\psi\rangle$$

   が Schrödinger 方程式を満すことを示せ。

3. 大きさが一定で一様な磁場が、$z$ 軸と角度 $\theta$ を成し $z$ 軸の回りを角速度 $\alpha$ で回転している。すなわち $\boldsymbol{B}(t) = B\boldsymbol{n}(t)$、$\boldsymbol{n}(t) = (\sin\theta\cos\alpha t, \sin\theta\sin\alpha t, \cos\theta)$ と書ける。この磁場の中にスピン $\boldsymbol{J}$ の粒子が静止している。このスピンの運動を決定するハミルトニアンは、$H(t) = -\mu\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{B}(t)$ である。ただし、$\mu$ はこの粒子の磁気回転比である。この系を実際に解くことにより、この系で断熱定理が成り立つことを見てみよう。

   (a) 時刻 $t$ におけるハミルトニアンの固有状態は $J_n(t) = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}(t)$ の固有状態 $|m;t\rangle$ $(m = -j,\cdots,j)$ で、固有値は $E_m = -m\hbar\gamma$ $(\gamma = \mu B)$ である。 $|m;t\rangle = A(t)|m;0\rangle$ となるようなユニタリー演算子 $A(t)$ を求めよ。

   (b) Schrödinger 表示から、$|\psi(t)\rangle_A = A^\dagger(t)|\psi(t)\rangle$ で定義される表示へ移る。この表示でのハミルトニアン $H_A(t)$ が $H(0)$ になることを示せ。

   (c) $|\psi(t)\rangle_A$ の満す運動方程式を導き、それを解くことにより

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}J_z\alpha t\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\gamma J_0 + \alpha J_z)t\right]|\psi(0)\rangle$$

   を示せ。ただし、$J_0 = J_n(0)$ である。

   (d) 断熱定理によれば、磁場の回転がゆっくりである極限では、$|\psi(0)\rangle = |m;0\rangle$ ならば $|\psi(t)\rangle =$ (複素位相) $\times\, |m;t\rangle$ である。上の結果からこれを確かめよ。また、$(\alpha\sin\theta/\gamma)^2 \ll 1$ であれば、これが良い近似であることを示せ。