量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.1 (2002/10/3)

1. $t=-\infty$ には摂動は無く、それからゆっくりと摂動が加えられるような状況を考える。すなわち、摂動は $\hat{V}(t)=\hat{V}e^{\epsilon t}$ $(\epsilon>0)$ であるとする。($\epsilon\to 0$ とすれば摂動は時間的に一定となる。)

   (a) $t=-\infty$ で状態は $|i\rangle$ にあったとしよう。$n\neq i$ として、時刻 t での状態 $|n\rangle$ への遷移振幅 $c_n(t)$ を 1 次の摂動で求め、$\epsilon\to 0$ で単位時間あたりの遷移確率が $w_{ni}=(2\pi/\hbar)\delta(E_n-E_i)|V_{ni}|^2$ となることを示せ。だだし、$V_{ni}\equiv\langle n|\hat{V}|i\rangle$ である。

   (b) 状態 $|i\rangle$ への遷移振幅 $c_i(t)$ を摂動の 2 次まで求め、$\epsilon\to 0$ の極限で

   $$\frac{\dot{c}_i}{c_i}=\frac{1}{i\hbar}V_{ii}+\frac{1}{i\hbar}\sum_{m\neq i}\frac{|V_{mi}|^2}{E_i-E_m+i\hbar\epsilon}$$

   となることを示せ。

   (c)

   $$c_i(t)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\delta E_i-i\frac{\Gamma_i}{2}\right)t\right]$$

   と置き、δE_i と Γ_i を決定し、δE_i がエネルギー準位のずれ、$\hbar/\Gamma_i$ が $|i\rangle$ の寿命を表わすことを説明せよ。

   (d) t が小さいとき、摂動の 2 次までで確率が保存していることを確かめよ。

2. 前問と同様に、周期的摂動をゆっくり加えることを考える。すなわち、
   $\hat{V}(t)=(\hat{F}e^{-i\omega t}+\hat{F}^\dagger e^{i\omega t})e^{\epsilon t}$ である。

   (a) $t=-\infty$ で状態 $|i\rangle$ にあったとして、時刻 t での $|n\rangle$ への遷移振幅を、摂動の 1 次で求めよ。ただし、E_n-E_i は $\hbar\omega$ に近いものとする。

   (b) $\epsilon\to 0$ の極限をとることにより、周期的摂動による単位時間当りの遷移確率が

   $$w_{fi}=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|\hat{F}|i\rangle|^2\delta(E_n-E_i-\hbar\omega)$$

   であることを示せ。

3. 1 次元調和振動子に $t=0$ で力積が F_0 であるような瞬間的な力 $F(t)=F_0\delta(t)$ が働いた。ハミルトニアンは $\hat{H}=\hat{p}^2/(2m)+m\omega^2\hat{x}/2-F(t)\hat{x}$ である。$t<0$ で基底状態にあったとして、$t>0$ でも基底状態にとどまる確率を求めよ。

4. ハミルトニアン $\hat{H}_0$ が非常に短かい時間で $\hat{H}$ に変化した。$\hat{H}_0$ の固有状態と固有値を $|\varphi_i^{(0)}\rangle, E_i^{(0)}$、$\hat{H}$ の固有状態と固有値を $|\varphi_f\rangle, E_f$ とする。始状態 $|\varphi_i^{(0)}\rangle$ から終状態 $|\varphi_f\rangle$ への遷移確率は $w_{fi}=|\langle\varphi_f|\varphi_i^{(0)}\rangle|^2$ で与えられる。ハミルトニアンの変化 $\hat{V}=\hat{H}-\hat{H}_0$ が摂動とみなせるとき、

   $$w_{fi}=\frac{|\langle\varphi_f^{(0)}|\hat{V}|\varphi_i^{(0)}\rangle|^2}{(E_f^{(0)}-E_i^{(0)})^2}$$

   と書けることを示せ。