量子力学 2 演習　　No.8　97/6/12

1. 正準交換関係をみたす演算子$\hat{q}_i$, $\hat{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ について考える。すなわち、$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$である。
   (a) ユニタリー演算子

$$\hat{U}(a) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\sum_{i=1}^{n} a_i\hat{p}_i\right), \quad \text{ただし } a \text{ は実ベクトル},$$

   が$\hat{U}(a)\hat{U}(b) = \hat{U}(a+b)$ および$\hat{U}(a)^{-1}\hat{q}_i\hat{U}(a) = \hat{q}_i + a_i$をみたすことを示せ。
   (b) 前問の結果は$\hat{U}(a)$ が移動量 a の平行移動 (並進) 演算子であることを示している。$\hat{U}(a)$ を位置の固有ベクトル $|q\rangle$ に作用させ、$\hat{U}(a)|q\rangle = |q+a\rangle$ であることを確かめよ。
   (c) $\hat{U}(a)|q\rangle = |q+a\rangle$ の両辺を a について展開することにより、$\hat{p}_i$の $|q\rangle$ への作用の仕方を決定せよ。
   (d) $\langle q|\hat{q}_i|\psi\rangle$ および $\langle q|\hat{p}_i|\psi\rangle$ を計算することにより、座標表示の波動関数 $\langle q|\psi\rangle = \psi(q)$ に対する$\hat{q}_i$および$\hat{p}_i$の表示を求めよ。
   (e) $|q\rangle$ の完備性を用いて次の式を示せ。

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int d^n q\, \psi_1(q)^* \psi_2(q)$$

   (f) $\hat{q}_i|p\rangle$ はどう書けるか。
2. 不確定性関係について考える。
   (a) $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ (Schwarz の不等式) を導け。
   (b) あるエルミート演算子 A に対して、$\Delta A = A - \langle A\rangle$ という演算子を定義する。ここで $\langle A\rangle$ はいま考えている状態 (必要なときは $|\rangle$ と書くことにする) についての期待値を表す。$|\alpha\rangle = \Delta A|\rangle$、$|\beta\rangle = \Delta B|\rangle$ と考え、前問の結果を用いて $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2$を示せ。
   (c) $\Delta A\Delta B = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$ を示せ。ただし、$\{\quad,\quad\}$ は反交換子を表す。
   (d) 以上の結果を用いて不確定性関係

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$$

   を導け。
   (e) 上の式で等号が成り立つのは、$\Delta A|\rangle = \lambda\Delta B|\rangle$ で、λが純虚数の場合であることを示せ。
   (f) $\hat{q}$と$\hat{p}$の不確定性関係を導け。
   (g) 広がり a の 1 次元のガウス型の波束

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(\pi a^2)^{\frac{1}{4}}}\exp\left(i\frac{p}{\hbar}x - \frac{x^2}{2a^2}\right)$$

   について、位置と運動量の不確定性を評価し、不確定性が最小になって入ることを確かめよ。
   (h) 調和振動子のエネルギー固有状態 $|n\rangle$ について位置と運動量の不確定性を評価せよ。(ヒント：位置と運動量の演算子を生成・消滅演算子で表せ。)
3(a) 次の式を正準交換関係を用いて示せ。ただし、$G(\hat{p})$、$F(\hat{q})$ はテイラー展開で定義されているものとする。

$$[\hat{q}_i, G(\hat{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial\hat{p}_i}, \qquad [\hat{p}_i, F(\hat{q})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial\hat{q}_i}$$

   (b) 1 次元の自由粒子について、演算子$\hat{q}(t)$ および$\hat{p}(t)$ の Heisenberg 方程式を解け。
   (c) $[\hat{q}(t), \hat{q}(0)]$ を求めよ。
   (d) $\hat{q}(t)$ と$\hat{q}(0)$ との不確定性関係を求めよ。