量子力学 2 演習　　No.6　97/5/29

1. 状態ベクトルは Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_S = \hat{H}|\psi(t)\rangle_S$$

にしたがって時間発展し、演算子自身は時間発展せずにその期待値が状態ベクトルの時間発展によって、

$$\bar{O}(t) = {}_S\langle\psi(t)|\hat{O}_S|\psi(t)\rangle_S$$

と時間とともに変化するような見方を Schrödinger 描像と呼ぶ。一方、状態ベクトルは時間に依存せず演算子が時間発展するような見方も可能でこれを Heisenberg 描像と呼ぶ。以下では簡単のため $\hat{H}$、$\hat{O}_S$ は陽には時間に依存しないとする。

(a) Heisenberg 描像での時間に依存しない状態ベクトルを $|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S$ と定義する。$\bar{O}(t)$ が見方 (描像) に依らないこと、すなわち $\bar{O}(t) = {}_H\langle\psi|\hat{O}_H(t)|\psi\rangle_H$ と書けることを用いて、$\hat{O}_H(t)$ と $\hat{O}_S$ の関係を求めよ。

(b) 前問の結果を t で微分して、$\hat{O}_H(t)$ の時間発展を決定する微分方程式 (Heisenberg 方程式) を導け。

(c) $\hat{q}$、$\hat{p}$ に対する Heisenberg 方程式を求め、それらが古典的な正準方程式と同じ形になることを示せ。ただし、$\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ とする。

(d) 前問で見たように、$\frac{1}{i\hbar}[\quad,\quad] \to \{\quad,\quad\}$ と交換子を Poisson 括弧で置き換え、$\hat{q} \to q$、$\hat{p} \to p$ と置き換えると Heisenberg 方程式は古典的な運動方程式に対応していることが分かる。この交換子と Poisson 括弧の類似性は、

$$\left(\frac{1}{i\hbar}[\hat{O}_1, \hat{O}_2]\right)_{\rm cl} = \Big\{(\hat{O}_1)_{\rm cl}, (\hat{O}_2)_{\rm cl}\Big\}$$

と一般化できる。ただし、$\hat{q}$、$\hat{p}$ で書けていて $\hbar$ に陽に依存していない演算子を考え、$(\hat{O})_{\rm cl}$ は $\hat{O}$ に対して $\hat{q} \to q$、$\hat{p} \to p$ という置き換えを行ったものとする。$\hat{O}_1 = U(\hat{q})$, $\hat{O}_2 = \hat{H}$ として上の式を確かめよ。ただし、U は任意関数、ハミルトニアンは前問と同じとする。

2. 1 次元調和振動子を考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{q}^2$$

で与えられ、$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ である。

(a) 消滅演算子 $\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{q} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{q} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{p}\right)$$

さらに数演算子を $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ で定義する。このとき、交換子 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$、$[\hat{n}, \hat{a}]$、$[\hat{n}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

(b) $\hat{H}$ を $\hat{n}$ で表せ。

(c) $\hat{n}$ の固有値は正または 0 であることを示せ。

(d) $\hat{n}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ のとき、$\hat{n}(\hat{a}|\alpha\rangle) = (\alpha-1)(\hat{a}|\alpha\rangle)$、$\hat{n}(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle) = (\alpha+1)(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle)$ を示せ。

(e) $\hat{n}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルを $|0\rangle$ と書くと、2c、2d より、$\hat{a}|0\rangle = 0$ である。また、$\hat{n}|0\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$ であることから、$|0\rangle$ は $\hat{n}$ の固有値 0 の固有ベクトルであることがわかる。ここで次のような状態を考える。

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$、$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$、$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$、$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$ を示せ。ただし、$\langle 0|0\rangle = 1$ とする。

(f) 調和振動子のエネルギー固有値を求めよ。

(g) 基底状態 $|0\rangle$ の座標表示 $\langle q|0\rangle$ を求めよ。

(h) Heisenberg 描像での生成・消滅演算子の時間発展を求めよ。

(i) 時刻 t での座標と運動量の状態 $|n\rangle$ についての期待値、すなわち $\langle n|\hat{q}(t)|n\rangle$ および $\langle n|\hat{p}(t)|n\rangle$ を求めよ。

3. 前問の最後に見たように、エネルギー固有状態 $|n\rangle$ は我々が直感的に考える (古典的な) 調和振動子とは異なるふるまいをする。そこで、コヒーレント状態と呼ばれる消滅演算子の固有状態を考える。すなわち、$\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, ($\lambda$ は複素数) とする。ただし、$\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$ とする。

(a) $\langle\lambda|\hat{q}(t)|\lambda\rangle$ および $\langle\lambda|\hat{p}(t)|\lambda\rangle$ を求めよ。

(b) $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$ とおき、c_n を c_0 で表せ。

(c) $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$ を用いて c_0 を決定し、$|\lambda\rangle = \exp(-|\lambda|^2/2)\exp(\lambda\hat{a}^\dagger)|0\rangle$ となることを示せ。

(d) $|\lambda\rangle$ の座標表示を求めよ。

(e) 次の式を示せ。

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\lambda|\lambda\rangle\langle\lambda| = 1$$