量子力学第二演習　　No.11　97/7/3

1. 角運動量演算子 $\vec{J}$ を、交換関係

$$[J_a, J_b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} J_c$$

を満たすものとして定義する。

(1) $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ と J_3 が交換することを示せ。これにより、J^2 と J_3 には同時固有ケット $|\alpha, \beta>$ が存在し、

$$\begin{aligned} J^2|\alpha,\beta> &= \alpha|\alpha,\beta>, \\ J_3|\alpha,\beta> &= \beta|\alpha,\beta> \end{aligned}$$

を満たす。

(2) $J_+ = J_1 + iJ_2$, $J_- = J_1 - iJ_2$ に対し、交換関係 $[J_3, J_+]$, $[J_3, J_-]$, $[J_+, J_-]$ を計算せよ。

(3) (2) の結果を使って、$J_+|\alpha,\beta>$, $J_-|\alpha,\beta>$ は J_3 の固有ケットであることを示し、固有値を求めよ。

(4) $|\alpha,\beta>$ が演算子 J_-J_+ の固有ケットでもあることを示し、その固有値を求めよ。さらに、その固有値が非負であることを示せ。

(5) α の値が固定されているとしよう。このとき、β の値は制限されており、最大値 β' と最小値 β'' があることを示せ。

(6) (3) および (5) の結果から、

$$J_+|\alpha,\beta'>=0, \quad J_-|\alpha,\beta''>=0$$

であることを示せ。

2. 問題 1 の続きで以下の問いに答えよ。

(1) $|\alpha,\beta''>$ に J_+ を何回もかけてゆくことにより、$(\beta' - \beta'')/\hbar$ は必ず整数になることを示せ。

(2) $J^2 = J_3(J_3 + \hbar) + J_-J_+$ を示せ。この結果を使って、α と β' の間の関係を求めよ。

(3) (2) と同様にして、α と β'' の間の関係を求めよ。

(4) (2) と (3) の結果から、$\beta' + \beta'' = 0$ を示せ。

(5) $<\alpha,\beta|J_-J_+|\alpha,\beta>$ の値を計算せよ。その結果から、J_+ の $|\alpha,\beta>$ に対する作用を具体的に書き下せ。

(6) $<\alpha,\beta|J_+J_-|\alpha,\beta>$ の値を計算せよ。その結果から、J_- の $|\alpha,\beta>$ に対する作用を具体的に書き下せ。

3. 問題 2 (1) ,(4) より、$\beta' = J$ と書くと、$2J/\hbar$ は必ず整数になることがわかる。簡単な $J/\hbar = 1/2, 1$ の場合を考えてみよう。

(1) $J/\hbar = 1/2$ の場合に、α の値および行列要素$<\alpha,\beta_j,|J_a|\alpha,\beta_l>$ を計算し、J_1, J_2, J_3 の行列表示を求めよ。結果は Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を使って書くこと。

(2) $J/\hbar = 1$ の場合に、α の値および行列要素$<\alpha,\beta_j,|J_a|\alpha,\beta_l>$ を計算し、J_1, J_2, J_3 の行列表示を求めよ。