量子力学 2 演習　　レポート問題 No.1　01/4/26

(提出期限：5 月 9 日午後 5 時. 提出場所は B424.)

1. Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について次の式を示せ。

(a) 反交換関係: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

(b) 交換関係: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

(c) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

(d)

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi\right) = \cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sin\frac{\phi}{2}$$

ただし、$\boldsymbol{n}^2 = 1$。(級数展開し、前問で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ として得られる式を用いよ。)

2. スピン $1/2$ の粒子の $J_z = \pm\hbar/2$ の状態をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表す。これらはそれぞれスピンが z 軸の正の方向 $(0,0,1)$ を向いた状態と負の方向 $(0,0,-1)$ を向いた状態になっている。

この 2 つの状態の線形結合でスピンがベクトル $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ の方向を向いた状態を表せ。(単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ のまわりの角度 α の回転を表す演算子は $\exp(-i\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{n}\alpha/\hbar)$ であり、$j = 1/2$ のとき $\hat{J}_i = \hbar\sigma_i/2$ と表されること用いよ。)

3. $2j+1$ 個の演算子 $\hat{O}_{j,m}$ $(m = j, \cdots, -j)$ が、交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{J}^3, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar m \hat{O}_{j,m} \\ [\hat{J}^+, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\hat{O}_{j,m+1} \\ [\hat{J}^-, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\hat{O}_{j,m-1} \end{aligned}$$

を満たすとき、これらの演算子は角運動量 j をもつテンソル演算子であるという。

(a) 角運動量の固有状態を $|j,m\rangle$ などと書くとき、m 選択則

$$\langle\varphi; j_2, m_2|\hat{O}_{j,m}|\psi; j_1, m_1\rangle = 0\,, \quad m_2 \neq m + m_1$$

を導け。(角運動量以外の状態のラベルを φ, ψ でまとめて表わしてある。)

(b) スカラー演算子 $\hat{S}$ は $[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{S}] = 0$ を満たすから $j = 0$ のテンソル演算子であるといえる。($\hat{\boldsymbol{J}}$ は回転の生成子であることを思い出せ。) 行列要素 $\langle\varphi; j, m|\hat{S}|\psi; j, m\rangle$ が m に依存しないことを示せ。$\hat{S}$ をハミルトニアンにとった場合、これは何を意味するか。