量子力学 2 演習 No.10 (01/7/12)

1. 周期的なポテンシャルを持つ 1 次元系を考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)\,, \quad V(x+a) = V(x)$$

である。

(a) 並進演算子 $U = \exp(ipa/\hbar)$ が H と可換であることを示せ。

(b) U の固有値を $\exp(ika) \quad (-\pi/a \leq k \leq \pi/a)$ と置き、$V = 0$ のときの k の値に対するエネルギー準位を図示せよ。

(c) $V \neq 0$ のとき、V を摂動として扱いエネルギー準位がどのように変化するか示せ。(ヒント：V は実周期関数だから次のように Fourier 級数に展開できる。

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi}{a}nx\right), \quad c_{-n} = c_n^*$$

指数関数の部分は運動量の推進演算子であることに注意せよ。)

2. ベクトル演算子 $\hat{\boldsymbol{V}}$ は $[\hat{J}^i, \hat{V}^j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon^{ijk} \hat{V}^k$ を満たす。$\hat{\boldsymbol{V}}$ は $j = 1$ のテンソル演算子であることを確かめよ。ただし、$\hat{V}_{1,0} = \hat{V}^3$, $\hat{V}_{1,\pm 1} = \mp(\hat{V}^1 \pm i\hat{V}^2)/\sqrt{2}$ とせよ。