量子力学2演習　　No.7　00/6/1

1. (a) 次の交換関係を求めよ。

$$[L_i, L_j], \quad [\mathrm{L}^2, L_i], \qquad (i, j = x, y, z).$$

(b) 演算子

$$p_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

が $[r, p_r] = i\hbar$ を満たすことを示せ。

(c) No.6 の 1.(3)、3.(2) の結果を用いて、中心場のなかを運動している粒子のハミルトニアンが

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathrm{L}^2}{2mr^2} + U(r)$$

と表されることを示せ。

(d) 次の交換関係を求めよ。

$$[H, \mathrm{L}^2], \quad [H, L_i].$$

(e) 以上のことから上のハミルトニアンの固有状態について何がわかるか。

2. No.6 の 1.(4) から、動径方程式は

$$\frac{d^2R_\ell}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_\ell}{dr} + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R_\ell = 0$$

と書くことが出来る。

(a) $R_\ell(r) = \chi_\ell(r)/r$ とおき、$\chi_\ell(r)$ の満たす方程式を求めよ。

(b) $\lim_{r\to 0} r^2U(r) = 0$ として、$\chi_\ell(0)$ を求めよ。

(c) 自由粒子 $(U = 0)$ について、$k^2 = 2mE/\hbar^2$、$\xi = kr$ とおいて、$R_\ell(\xi)$ の満たす方程式を求めよ。

(d) $\ell = 0$ のとき、$R_0(\xi) = \chi_0(\xi)/\xi$ とおくことにより、$R_0(\xi)$ を求めよ。

(e) $\ell \neq 0$ の場合も考えて、極座標における自由粒子のハミルトニアンの固有関数を球ベッセル関数で表せ。

3. 球対称井戸型ポテンシャル

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

の中での束縛状態 $(E < 0)$ について考える。

(a) $k^2 \equiv 2m(U_0 + E)/\hbar^2$ とおいて、$r < a$ での $R_\ell(r)$ を求めよ。

(b) $\rho^2 \equiv -2mE/\hbar^2$ とおいて、$r > a$ での $R_\ell(r)$ を求めよ。

(c) $r = a$ での接続条件を求めよ。

(d) $\ell = 0$ のとき、束縛状態のエネルギー準位を決定する式を求めよ。

(e) $\ell = 0$ の束縛状態が少なくとも一つ存在するための条件を求めよ。