量子力学 2 演習　　No.4　00/5/11

1. (a) 次の式を正準交換関係を用いて示せ。ただし、$G(\hat{p})$、$F(\hat{q})$ はべき級数で定義されているものとする。

$$[\hat{q}_i, G(\hat{p})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial \hat{p}_i}\,, \qquad [\hat{p}_i, F(\hat{q})] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{q}_i}$$

(注:これらは $G(\hat{p})$、$F(\hat{q})$ がべき級数展開できない場合も正しい。)

(b) 1 次元の自由粒子について、演算子 $\hat{q}(t)$ および $\hat{p}(t)$ の Heisenberg 方程式を解け。

(c) $[\hat{q}(t), \hat{q}(0)]$ を求めよ。

(d) $\hat{q}(t)$ と $\hat{q}(0)$ との不確定性関係を求めよ。

2. 1 次元調和振動子を考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \hat{q}^2$$

で与えられ、$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ である。

(a) 消滅演算子 $\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{q} + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{q} - i \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{p} \right)$$

さらに数演算子を $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ で定義する。このとき、交換子 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$、$[\hat{n}, \hat{a}]$、$[\hat{n}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

(b) $\hat{H}$ を $\hat{n}$ で表せ。

(c) $\hat{n}$ の固有値は正または 0 であることを示せ。

(d) $\hat{n}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ のとき、$\hat{n}(\hat{a}|\alpha\rangle) = (\alpha - 1)(\hat{a}|\alpha\rangle)$、$\hat{n}(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle) = (\alpha + 1)(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle)$ を示せ。

(e) $\hat{n}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルを $|0\rangle$ と書くと、2c、2d より、$\hat{a}|0\rangle = 0$ である。また、$\hat{n}|0\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle = 0$ であることから、$|0\rangle$ は $\hat{n}$ の固有値 0 の固有ベクトルであることがわかる。ここで次のような状態を考える。

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$、$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$、$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$、$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$ を示せ。ただし、$\langle 0|0\rangle = 1$ とする。

(f) 調和振動子のエネルギー固有値を求めよ。

(g) 基底状態 $|0\rangle$ の座標表示 $\langle q|0\rangle$ を求めよ。

(h) 調和振動子のエネルギー固有状態 $|n\rangle$ について位置と運動量の不確定性を評価せよ。(ヒント：位置と運動量の演算子を生成・消滅演算子で表せ。)

(i) Heisenberg 描像での生成・消滅演算子の時間発展を求めよ。

(j) 時刻 t での座標と運動量の状態 $|n\rangle$ についての期待値、すなわち $\langle n|\hat{q}(t)|n\rangle$ および $\langle n|\hat{p}(t)|n\rangle$ を求めよ。

3. 前問の最後に見たように、エネルギー固有状態 $|n\rangle$ は我々が直感的に考える (古典的な) 調和振動子とは異なるふるまいをする。そこで、コヒーレント状態と呼ばれる消滅演算子の固有状態を考える。すなわち、$\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, ($\lambda$は複素数) とする。ただし、$\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$ とする。

(a) $\langle\lambda|\hat{q}(t)|\lambda\rangle$ および $\langle\lambda|\hat{p}(t)|\lambda\rangle$ を求めよ。

(b) $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ とおき、c_n を c_0 で表せ。

(c) $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$ を用いて c_0 を決定し、$|\lambda\rangle = \exp(-|\lambda|^2/2) \exp(\lambda \hat{a}^\dagger)|0\rangle$ となることを示せ。

(d) $|\lambda\rangle$ の座標表示を求めよ。

(e) 次の式を示せ。

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1$$