

力学I(共通教育、田中担当クラス)レポート問題

提出期限: 7月8日の授業中に集める。

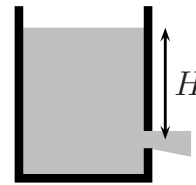
1. 質量 m , ばね定数 k の単振動の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

である。

- (a) m と k から時間の次元をもつ量を作り, この量により運動がどのように特徴付けられるか説明せよ。
 (b) 質量を2倍にすると運動はどのように変化するか。
 (c) ばね定数を半分にすると運動はどのように変化するか。
 (d) m と k から長さの次元をもつ量を作れないことを示し, その意味について述べよ。

2. 右図のような水槽に液体が入っていて, 水槽の側面下方の小さな穴から液体が流れ出している。穴の位置から見た液面の高さが H のとき, 流出する液体の速さを求めよ。ただし, 液体の粘性や摩擦は無視する。(ヒント: エネルギー保存則)



3. 1次元のポテンシャル $U(x) = -a/x + b/x^2$ 中での質点の運動を考える。ただし, $a, b > 0$ で $x > 0$ とする。

- (a) ポテンシャルの最小点を求め, ポテンシャルの概形を図示せよ。
 (b) 周期運動となる力学的エネルギーの範囲を示せ。
 (c) このポテンシャルの最小点付近で質量 m の質点が微小振動している。周期を求めよ。

4. 放物体の運動について考える。水平方向を x 軸, 鉛直上向きを y 軸にとる。初速度を $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ とする。初期位置 $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ から, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ まで運動するあいだに重力がした仕事を2通りの方法で計算する。空気抵抗は考えない。

- (a) 運動の間に力 \mathbf{F} がした仕事 W は, 線積分によって

$$W = \int_{\mathbf{r}(0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

と表わされる。これを時間についての積分になおすと

$$W = \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t') dt' \quad (1)$$

となることを示せ。

- (b) 運動方程式から $\mathbf{v}(t)$ を求め, 式(1)の時間積分を実行して仕事を求めよ。
 (c) 今の場合, 水平方向の位置 x によって運動経路上の位置は一意的に指定できる。 $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dx} dx$ なので

$$W = \int_{x(0)}^{x(t)} \mathbf{F}(x) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dx} dx$$

と書ける。運動の軌跡から $\frac{d\mathbf{r}}{dx}$ を導き, この積分を実行して仕事を求めよ。(もちろん, 結果は上と一致しているはずである。)

5. x - y 平面内で, 力 $\mathbf{F} = (-ky, kx)$ が働いている. ただし, k は正の定数である.

(a) 力のベクトルの様子を図示せよ.

(b) 力 \mathbf{F} を原点を中心とする半径 a の円に沿って反時計回りに線積分し, この力が保存力でないことを確認せよ.

(c) (b, b) , $(-b, b)$, $(-b, -b)$, $(b, -b)$ を頂点とする正方形に沿って反時計回りに力 \mathbf{F} を線積分せよ.