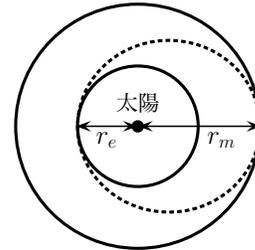


力学I(共通教育、田中担当クラス) 試験問題

1. 質量 m の質点がポテンシャル $U(x) = -c(x^2 - a^2)^2$ のもとで運動している. (a, c は正の定数.)

- (a) ポテンシャルの概形を図示せよ.
 (b) ポテンシャルの極小点の x とそこでの U の値を求めよ.
 (c) 極小点から速度 v で運動を開始した. 運動が有界となる $|v|$ の範囲を求めよ.
 (d) 極小点付近での微小振動の角振動数を求めよ.

2. 地球から火星へ探査機を送りたい. 図のように, 地球の軌道を半径 r_e の円軌道 (内側の実線), 火星の軌道を半径 r_m の円軌道 (外側の実線) とし, 破線の楕円軌道で探査機を火星の軌道に到達させる. (太陽以外の重力は無視する.)



- (a) 探査機を地球軌道から速さ v で発射する. (発射する向きは, 図のように地球軌道に接する向きである.) 探査機の面積速度を求めよ.
 (b) 探査機の軌道は太陽を中心とする極座標で, $r = \ell / (1 + \varepsilon \cos \varphi)$ と与えられる. ℓ と ε を r_e と r_m で表わせ.
 (c) 重力定数 G , 太陽の質量 M , 面積速度 $h/2$ を用いると, $\ell = h^2 / (GM)$ である. これと上の結果を合せて, v を求めよ.

3. 万有引力のもとで運動する質量 m の惑星の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

である.

- (a) 式 (1) の両辺と速度ベクトル \mathbf{v} の内積から, エネルギー保存則を導け.
 (b) 式 (1) の両辺と位置ベクトル \mathbf{r} のベクトル積から, 角運動量保存則を導け.

4. 密度が中心からの距離 R の関数として,

$$\rho(R) = \rho_0 \frac{R_0}{R} e^{-(R/R_0)^2}$$

と与えられる球対称な物体がある. ただし, ρ_0, R_0 は正の定数である. この物体の質量を求めよ. (注: この物体は無限遠まで広がっている.)