

力学I(共通教育、田中担当クラス) レポート問題

提出期限: 7月9日の授業中に集める。

1. 地面から一定の角度でボールを投げる際の放物運動について考える。空気抵抗などは無視する。
 - (a) 初速度 v_0 で原点から投げ出すとすると、この問題に現われる次元を持つ量は重力加速度 g と v_0 だけである。 g と v_0 から、時間の次元を持つ量と長さの次元を持つ量を作れ。
 - (b) 初速度を2倍にすると飛行時間、最高高度、到達距離はそれぞれ何倍になるか。
 - (c) 月面での重力加速度を地球の $1/6$ とすると、同じ初速度で投げると、月面での飛行時間、最高高度、到達距離それぞれ地球の場合の何倍になるか。
2. 高さ h から初速度 0 でボールを床に落とし弾ませた。はねかえり係数を e とする。
 - (a) n 回目に弾んだ直後の速度を求めよ。
 - (b) 最終的にボールが静止するまでの時間を求めよ。
3. 質量 m の質点が力 $F = -kx + c/x$ の作用の下、 $x > 0$ の領域で運動している。 $(k, c$ は正の定数。)
4. 放物体の運動について考える。水平方向を x 軸、鉛直上向きを y 軸にとる。初速度を $v_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ とする。初期位置 $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ から、 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ まで運動するあいだに重力がした仕事を2通りの方法で計算する。空気抵抗は考えない。

- (a) 運動の間に力 F がした仕事 W は、線積分によって

$$W = \int_{\mathbf{r}(0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

と表わされる。これを時間についての積分になおすと

$$W = \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t') dt' \tag{1}$$

となることを示せ。

- (b) 運動方程式から $v(t)$ を求め、式 (1) の時間積分を実行して仕事を求めよ。
- (c) 今の場合、水平方向の位置 x によって運動経路上の位置は一意に指定できる。 $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dx} dx$ なので

$$W = \int_{x(0)}^{x(t)} \mathbf{F}(x) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dx} dx$$

と書ける。運動の軌跡から $\frac{d\mathbf{r}}{dx}$ を導き、この積分を実行して仕事を求めよ。(もちろん、結果は上と一致しているはずである。)

5. $\mathbf{F} = (-1, x)$ として，線積分

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

について考える．始点 A を $(1, 0)$ ，終点 B を $(-1, 0)$ とする．

- (a) 積分経路を t を 0 から 1 まで動かしたときに $(x, y) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ が描く半円として，式 (2) の線積分を求めよ．
- (b) 積分経路を t を 0 から 1 まで動かしたときに $(x, y) = (1 - 2t, 0)$ が描く直線として，式 (2) の線積分を求め，上の結果と異なることを確かめよ．

6. 平面内ではたらく力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ について考える．

- (a) \mathbf{F} が保存力ならば，

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

であることを示せ．

- (b) $F_x = axy$, $F_y = ax^2/2$ は保存力か．もし保存力ならば，ポテンシャルを求めよ．
- (c) $F_x = axy$, $F_y = by^2$ は保存力か．もし保存力ならば，ポテンシャルを求めよ．