

## 力学II(西浦, 田中担当クラス) 試験問題

- 二体問題を考える. 2つの質点の質量と座標を  $m_1, \mathbf{r}_1, m_2, \mathbf{r}_2$  とし, 全質量を  $M$ , 換算質量を  $\mu$ , 重心座標を  $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/M$ , 相対座標を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  とする.
  - $M, \mu, d\mathbf{R}/dt, d\mathbf{r}/dt$  を用いて, 2つの質点の運動エネルギーの和を表わせ.
  - $M, \mu, \mathbf{R}, \mathbf{r}, d\mathbf{R}/dt, d\mathbf{r}/dt$  を用いて, 2つの質点の原点のまわりの角運動量の和を表わせ.

- 地表付近の質点の運動方程式は

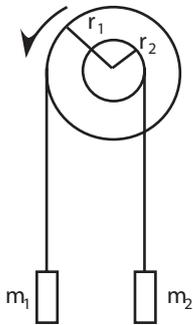
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g}_* + 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

で与えられる. ここで,  $\boldsymbol{\omega}$  は地球の自転の角速度,  $\mathbf{g}_*$  は遠心力を含めた重力加速度,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{a}'$  は地表に固定された地球とともに回転する座標系での速度および加速度,  $\mathbf{F}$  は重力, 遠心力以外の力である.

以下では, 北緯  $\lambda$  の地点での滑らかな水平面上の質点の自由な運動について, この地点を原点とし, 鉛直上向きを  $z$  軸, 南を  $x$  軸, 東を  $y$  軸とする座標系  $(x, y, z)$  で考える. 水平面内の自由な運動であるから,  $\mathbf{F}$  は面から受ける抗力のみで, それは  $m\mathbf{g}_*$  と釣り合っていて,  $z(t) = 0$  である.

- 運動方程式の  $x$  および  $y$  成分を書け.
- 時刻  $t = 0$  に, 原点から真南 ( $x$  軸の正の方向) へ速度  $v_0$  で質点を発射した. 速度の成分  $v_x(t) (= dx/dt)$ ,  $v_y(t) (= dy/dt)$  を求めよ. (ヒント: まず, 運動方程式の  $x$  成分を  $t$  で微分してみよ.)
- 質点の座標  $x(t)$ ,  $y(t)$  を求めよ.
- 質点の軌道が円であることを示し, その中心の座標, 半径を求めよ.

3. 図のように、固定水平軸のまわりに一体となって回転する輪軸に、軸のまわりと輪のまわりに反対向きに糸を巻きつけ、糸の自由端に質量  $m_1$  と  $m_2$  のおもりを取り付ける．2つのおもりを静かにはなすとき、輪軸の回転の角加速度の大きさとそれぞれのおもりの加速度の大きさを求めよ．ただし、輪軸の慣性モーメントを  $I$ 、輪の半径  $r_1$  を、軸の半径を  $r_2$  とする．また、重力加速度の大きさは  $g$  とせよ．糸のすべりはしないものとする．



4. 図のように、密度が均一な円柱が角度  $\theta$  の斜面上を最大傾斜の方向に沿って回転しながら落下する運動を考える．この円柱の質量は  $M$  で底面の半径は  $a$  である．円柱と斜面との間にすべりは無いとする．円柱が受ける力は、重力、斜面からの垂直抗力と摩擦力がある．重力加速度の大きさは  $g$  とせよ．
- 円柱が斜面を落下する際の重心の加速度の大きさ、回転の角加速度の大きさ、摩擦力の大きさを求めよ．
  - 斜面をすべることなく円柱が落下するための、斜面の傾斜角  $\theta$  に関する条件を求めよ．ただし、円柱と斜面の間の静止摩擦係数を  $\mu$  とする．
  - 円柱は、はじめ斜面上に静止しており、時刻  $t = 0$  に静かに転がり始めるとする．時刻  $t (> 0)$  における円柱の回転運動のエネルギーを求めよ．

