2013/12/20 出題

力学II(田中担当クラス) レポート問題

提出期限: 1/10 の授業時に集める.

1. ベクトル 3 重積の公式
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$
を示せ.

2. 一定の加速度 a で進む電車の中で，長さ ℓ の振り子が小さく振れている．周期を求めよ.

3. 電磁場中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する点電荷 q に作用する力は，ローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ である．y 軸方向の一様な静電場 $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$ と z 軸方向の一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の中での，質量 m，電荷 q の点電荷の運動について考えよう.
   (a) 運動方程式を成分で書け.
   (b) 座標変換 $x' = x - (E/B)t$, $y' = y$, $z' = z$ を考え，座標系 (x', y', z') での運動方程式を導け.
   (c) もとの座標系 (x, y, z) で $t = 0$ で原点で静止していたとして，(x', y', z') 系での初期条件はどうなるか.
   (d) 上の初期条件のもとで (x', y', z') 系で運動方程式を解き，(x, y, z) 系での解を求めよ. ($\omega_c = qB/m$ と置け．これはサイクロトロン角振動数と呼ばれる．)
   (e) $(q, E, B > 0$ として$)$ 上の解の様子を図示せよ.

4. 一様な静磁場 $\boldsymbol{B}$ 中の質量 m の点電荷 q の運動について考えよう.
   (a) 運動方程式は,
$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{q}{m}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$
   となる. (この方程式はベクトル $\boldsymbol{v}$ が角速度 $\boldsymbol{\omega_c} \equiv -q\boldsymbol{B}/m$ で回転していることを表している．) これは容易に解け，解は螺旋運動となる. (前問で $E = 0$ として初期条件を適当に変えればよい．) ここでは，この問題を角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の回転座標系で考える. この座標系での運動方程式を導け.
   (b) 遠心力の項が消えるように $\boldsymbol{\omega}$ を決定せよ.
   (c) 回転座標系での速度 $\boldsymbol{v}'$ の $\boldsymbol{B}$ に垂直な成分をゼロにできることを示し，その結果，点電荷はこの座標系で $\boldsymbol{B}$ に平行に等速直線運動をすることを示せ. (従って，もとの座標系では螺旋運動になる．)

5. N 個の質点からなる系を考える.
   (a) T を全運動エネルギーとして，次の式を示せ.
$$2T = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_i \tag{2}$$

(b) 物理量 f の長時間平均を

$$\langle f \rangle \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt \tag{3}$$

と定義する．$f(t)$ が有界な関数 $F(t)$ の時間微分であるとき，$\langle f \rangle = 0$ であることを確かめよ．

(c) 質点が空間の限られた領域の中で，有限の速さで運動しているとしよう．この系に作用する力は，全てポテンシャル U によるものとして，

$$2\langle T \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \right\rangle \tag{4}$$

となることを示せ．(ビリアル定理)

6. 以下の様な場合について，剛体の慣性能率を求めよ．なお，剛体の全質量を M とする．

(a) 質量 $M/2$ の質点が質量の無視できる長さ $2a$ の細い棒で連結されているもの．回転軸は重心を通り棒に垂直．

(b) 長さ $2a$ の一様な棒．回転軸は重心を通り棒に垂直．

(c) 半径 a の円板．回転軸は中心を通り板に垂直．

(d) 半径 a の中空の円筒．　回転軸は円筒の中心軸．

(e) 半径 a の (中が詰っている) 円柱．　回転軸は円筒の中心軸．

(f) 半径 a の球殻．回転軸は中心を通る任意の軸．