2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 問題 No. 12 (2007/07/06)

1. 3 次元空間を運動している質量 m の自由粒子のラグランジアンを，デカルト座標，円柱座標，球座標で書け．

2. 単振り子について，ラグランジュ形式で考察しよう．拘束力である糸 (または棒) の張力が運動方程式に入ってこないように，実際に運動が起こる方向に一般座標をとる．すなわち，振り子の描く円弧に沿う変位を一般座標とすればよい．ここでは，最下点からの円弧を長さを振り子の長さ ℓ で割ったもの，つまり振れ角 θ を一般座標とする．(θ は必ずしも小さくない．)

   (a) θ，$\dot{\theta}$ を用いてラグランジアンを書け．

   (b) ラグランジュの運動方程式を求め，それがスタンダード No. 6 の問題 1 で考察したものと一致することを確かめよ．

   (c) 上では，動径方向には実際の運動が生じないから，拘束条件を予め解くことにより，張力が問題に表われないようにした．以下では，張力を求めるために，拘束されている方向，すなわち動径方向の仮想的な運動を考える．動径座標を r とし，r 方向の運動も許されるとして，ラグランジアンを求めよ．(振り子の支点を原点とする極座標で考えているから，1 の円柱座標の結果を流用できる．)

   (d) 座標 r についてのラグランジュ方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=Q'_r \tag{1}$$

   となる．ここで，Q'_r は一般化力からポテンシャルによるものを除いたものの r 成分である．張力の r 成分を T_r とすると $T_r=-Q'_r$ であることを示せ．(ヒント：

$$Q'_r=F'_x\frac{\partial x}{\partial r}+F'_y\frac{\partial y}{\partial r} \tag{2}$$

   で，$\boldsymbol{F}'$ とは張力そのものである．)

   (e) 2c で求めたラグランジアンを用いて，式 (1) の左辺を評価し，さらに拘束条件 $r=\ell$ を代入することにより，T_r を求めよ．得られた結果が，アドバンス No. 9，1 で用いた張力と一致していることを確かめよ．

3. ポテンシャルが座標の k 次の同次関数であるとする．すなわち，

$$U(\alpha\boldsymbol{r}_1,\cdots,\alpha\boldsymbol{r}_n)=\alpha^k U(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)\,. \tag{3}$$

   (a) 座標を $\boldsymbol{r}_a\to\boldsymbol{r}'_a=\boldsymbol{r}_a/\sigma$ とし，時間を $t\to t'=t/\tau$ と変換するとき，ラグランジアン $L(\boldsymbol{r}_a,\dot{\boldsymbol{r}}_a,t)$ が $L(\boldsymbol{r}'_a,\dot{\boldsymbol{r}}'_a,t')$ の定数倍となるような，σ と τ の関係を求めよ．

   (b) 運動方程式の解の描く軌道は，上の座標の定数倍の変換によって，相似な軌道に変換される．一方，ラグランジアンを定数倍しても運動方程式が不変であることは明らかである．従って，時間も上で求めたような定数倍の変換を行なえば，この相似な軌道も運動方程式の解になる．$k=2,-1$ の場合について，これが意味することは何か．