

1. 糸で釣り下げられた単振り子を考える.

- (a) 糸の張力を力学的エネルギーと振れ角で表わせ. ただし, 最下点でのポテンシャルをゼロとする.  
 (b) 糸がたるまないようなエネルギーの範囲を求めよ. (張力が正であればよい. 2つの場合がある.)

2. バケツに水を入れ, 中心軸の周りに角速度  $\omega$  で回転させる. 定常状態に達すると水面は一定の曲面になる. この曲面を決定したい. 以下, バケツと共に回転している座標系で考える. また, この問題は軸対称であるから, 中心軸を  $z$  軸とする円柱座標で考えるのが便利である. (デカルト座標と円柱座標の関係は,  $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z$  である.)

- (a) 水面付近の水の微小部分 (質量  $m$ ) に作用する重力と遠心力の合力を  $F$  とする.  $F$  を円柱座標で表し,

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_z \mathbf{e}_z \quad (1)$$

と書くとき,  $F_\rho, F_\phi, F_z$  を求めよ. ここで,  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$  は, それぞれ動径方向, 方位角方向,  $z$  軸方向の基底ベクトルである.

- (b) 定常状態では, 上で求めた合力  $F$  と「垂直抗力」が釣り合っている. 従って,  $F$  は水面に垂直になっていなければならない. このことから, 水面が放物面になっていることを示せ.  
 (c) 同じ結論をポテンシャルを用いて得ることもできる.  $F$  に対するポテンシャルを求めよ.  
 (d) 定常状態では, 水面の接線方向に力の成分はない. 従って, 水面は等ポテンシャル面になっている. このことから, 水面が放物面になっていることを示せ.

3. 地上での質点の運動に対する地球の自転の影響を調べるために, 地面に固定された座標系 (回転座標系) を考える. 地球の自転の角速度ベクトルを  $\omega$ , 地球の中心と回転座標系の原点 (地面に固定されている) を結ぶベクトルを  $\mathbf{R}$  とすると, 回転座標系での運動方程式は,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\omega \times (\omega \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})) - 2m\omega \times \mathbf{v} \quad (2)$$

となる. ここで,  $m\mathbf{g}$  は重力で,  $\mathbf{F}$  は重力以外の外力である.

- (a) 重力と遠心力  $-m\omega \times (\omega \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}))$  を合せたものを

$$m\mathbf{g}_{\text{eff}} = m\mathbf{g} - m\omega \times (\omega \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})) \quad (3)$$

と書けば,  $\mathbf{g}_{\text{eff}}$  は有効重力加速度であり, その方向が鉛直下向きを定義する.  $r \ll R$  として, 緯度  $\alpha$  での遠心力による加速度を求め, それが十分小さいことを確かめよ. 以下,  $\mathbf{g}$  と  $\mathbf{g}_{\text{eff}}$  の差を無視する.

- (b) 緯度を  $\alpha$  とし,  $z$  軸を  $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -g_{\text{eff}} \mathbf{e}_z$  とし (すなわち, 鉛直上向きを  $z$  軸とし, ), 東を  $x$  軸, 北を  $y$  軸とする. 自由落下する質点の運動方程式が,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2\omega \left( \frac{dz}{dt} \cos \alpha - \frac{dy}{dt} \sin \alpha \right) \quad (4)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2\omega \frac{dx}{dt} \sin \alpha \quad (5)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g_{\text{eff}} + 2\omega \frac{dx}{dt} \cos \alpha \quad (6)$$

となることを確かめよ.

- (c) 高さ  $h$  から初速度 0 で自由落下する質点の運動について調べよ. 特に, 落下点は鉛直下の点からどちらの方向にどれだけずれるか. ( $\omega$  の 2 次以上の項は無視できる.)  
 (d)  $\alpha = 45^\circ, h = 100\text{m}$  のとき, このずれはどれ程か.