2006年度 力学1演義 (アドバンス) 略解 (No. 7からNo. 12)

No. 7

1. (a) $\ddot{\theta} = d(\dot{\theta}^2/2)/d\theta$ を用いて，式 (1) を θ で積分すればよい．
   (b) 式 (2) は変数分離形の1階微分方程式.
   (c) 略.
   (d) 略.
   (e) 約 1.7%.
2. 略.

No. 8

1. (a) 運動方程式の両辺に v をかけて，変形すると，$\frac{d}{dt}(mv^2/2 + mgx) = -\gamma v^2$.（$x$ は鉛直上向きの座標.）
   (b) 終端速度 $v_t = -mg/\gamma$ を上の結果に代入して，$-m^2g^2/\gamma$.
   (c) 略.
   (d) 略.
2. (a) 略.
   (b) 略.
   (c) 略.
   (d) 抵抗力や摩擦力は，常に $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} < 0$ ゆえ，式 (1) の左辺も負となる．

No. 9

1. $T = mg(3\cos\theta - 2) + 2E/\ell$.
2. $(0 <)E \leq mg\ell$.（往復運動．水平まで上がる．）$E \geq 5mg\ell/2$.（回転運動．）
3. (a) $-a^2/(4b) < E < 0$.
   (b) $T = \pi a\sqrt{m/(-2E^3)}$.

No. 10

1. $U/m = -GM/R$ (定数)．$\boldsymbol{F} = -\nabla U = 0$.
2. コスミックストリングを z 軸とする円柱座標で考えて，
$$\frac{U}{m} = -G\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}\,.$$
(この積分は収束しない．) 動径方向の力 F_r は，
$$\frac{F_r}{m} = -\frac{d}{dr}\frac{U}{m} = -2G\frac{\lambda}{r}\,.$$
これを積分して，$U/m = 2G\lambda\log r +$ 積分定数.

No. 11

1. $L = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$.
2. 略.
3. (a) $\tau = \sigma^{1-(k/2)}$.
   (b) $k = 2$ のとき，振り子の等時性．$k = -1$ のとき，ケプラーの第3法則.

No. 12

1. (a) 略.
   (b) 略.
   (c) 左辺は A, B, C の2階微分の1次同次式である．A の2階微分を含む項のみを計算すると (第2,3項からのみ現われる．)，ゼロになっていることが確かめられる．B, C についても同様.
2. Jacobiの恒等式，$dA/dt = \partial A/\partial t + \{A, H\}$，$dA/dt = dB/dt = 0$ などから，$(d/dt)\{A, B\} = 0$ を示せばよい.
3. (a) $H = p^2/(2m) + (k/2)(x - v_0t)^2 =$ 質点の全エネルギー．$\partial H/\partial t \neq 0$ ゆえ，保存量ではない.
   (b) $L = (m/2)(\dot{x}' + v_0)^2 - (k/2)x'^2$.
   (c) $H' = (p' - mv_0)^2/(2m) + (k/2)x'^2 + l$ 定数 $\neq$ 全エネルギー．$\partial H'/\partial t = 0$ ゆえ，保存量.