

第5章 マクスウェル方程式と電磁波

5.1 マクスウェル方程式

電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第5章 マクスウェル方程式と電磁波

5.1.1 電場と磁場の双対性 (duality)

これまでに分かった電磁場の基本方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}, \quad (\text{ガウスの法則}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{ファラデーの法則}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}). \quad (\text{アンペールの法則}) \quad (4)$$

式 (1), (2) は動的な場合も成り立つ. (理由は以下で.)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}. \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (6)$$

式 (6) は磁場に対するガウスの法則. “磁荷” が存在しないだけ.
式 (3) は変化する磁場から電場ができることを表わしている.

式 (4) も式 (5), (6) のように動的な場に拡張してみよう.

$$\text{(誤)} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

電場と磁場の対応関係 (双対性) を考慮して, 式 (3) と (7) を比較してみると, (3) の右辺に (7) の電流に相当する “磁流” がないのは, (6) で “磁荷” がいないためと考えられる. (7) の右辺には, (3) の右辺のように, $\partial \mathbf{E} / \partial t$ のような項があると推測される. (変動する電場も磁場を作るだろう.)

5.1.2 アンペール・マクスウェルの法則

アンペール・マクスウェルの法則

$$(正) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (8)$$

証明のアイデア: 電荷保存則と矛盾しないように式(7)を拡張する。

証明: 式(7)の発散を考える。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t). \quad (9)$$

左辺 = 0. これは電荷保存則 (§§3. 1. 2)

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (10)$$

と矛盾する. 式(5)を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (11)$$

すなわち、電荷保存則は、

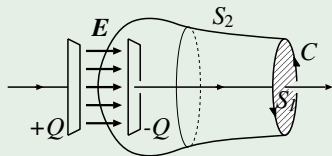
$$\nabla \cdot \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = 0 \quad (12)$$

と書ける. \Rightarrow 式(7)で $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i} + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ とすればよい. (証明終)

変位電流 (密度)

$$\mathbf{i}_d(\mathbf{r}, t) := \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (13)$$

例 1: コンデンサーと変位電流



平行板コンデンサーに電流 $I(t)$ が流れている. 閉曲線 C とそれに囲まれた2つの面 S_1 と S_2 を考える.

式 (8) の両辺を S_1 で積分すると,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I. \quad (14)$$

(S_1 には電場はないから, 変位電流の寄与はない.)
面 S_2 で積分すると, そこには (伝導) 電流はないから,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (15)$$

(変位電流の寄与のみ.)

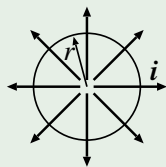
極板の電荷を $\pm Q(t)$, 面積を S とすると, 式 (2. 8. 2) より,

$$E(t) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 S}. \quad (16)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I}{\epsilon_0 S} \int_S dS = \mu_0 I. \quad (17)$$

(積分は E のあるところだけ, つまり極板間のみ.) 式 (14) と一致.
もし変位電流を考えないとこれは 0 になり, 式 (14) と矛盾.

例 2: 球対称で放射状の電流



半径 r の球面 S を考える. この内部の電荷を $Q(r, t)$ とすると, 電流密度は $i(\mathbf{r}, t) = i(r, t)\hat{\mathbf{r}}$ と書け,

$$i(r, t) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t} Q(r, t). \quad (18)$$

S 上の閉曲線 C を考える. S_C を C に囲まれた面として,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 \int_{S_C} \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \int_{S_C} \left[i + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q \right) \right] dS \\ &= \mu_0 \int_{S_C} \left[i + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

磁場はできない.

5.1.3 マクスウェル (Maxwell) 方程式

電磁場の方程式をまとめると,

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (23)$$

これらとローレンツ力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (24)$$

が電磁気学の基本法則となる。

Q. マクスウェルの方程式に解はあるか？

$$\left(\begin{array}{ll} \text{未知関数} & \mathbf{E}, \mathbf{B} \quad 6 \text{個} \\ \text{方程式の数} & \quad \quad 8 \text{個} \end{array} \right)$$

A. 式 (23) の発散を考えると,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (25)$$

左辺 = 0. また, 電荷保存則から $\nabla \cdot \mathbf{i} = -\partial \rho / \partial t$. よって,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0. \quad (26)$$

従って, $t = t_0$ で $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) = \rho(\mathbf{r}, t_0) / \varepsilon_0$ が成り立てば, 任意の時刻 t で式 (20) が成り立つ. すなわち, 式 (20) は初期条件として要求するだけでよい. (これが式 (1) \Rightarrow 式 (5) の理由.)

同様に式 (22) の発散を考えると,

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}. \quad (27)$$

$t = t_0$ で $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) = 0$ なら, 任意の t で $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$.

式 (20) と式 (21) が初期条件として成り立っていれば, 式 (22) と式 (23) で決定される \mathbf{E} , \mathbf{B} の時間発展で式 (20), 式 (21) が成り立たなくなるようなことはない.

⇒ 式 (20), 式 (21) は補助的な方程式で, \mathbf{E} , \mathbf{B} (6 つの未知関数) の時間発展は式 (22), 式 (23) (6 つの方程式) で記述される.

5.1.4 準定常電流

インダクタンスの議論 (§4.2) で、定常電流の場合の式を (4.2.8) のように時間的に変動する電流に拡張した。電流が導体中を流れるとき、オームの法則

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (28)$$

より、 \mathbf{i} が時間変化する場合には \mathbf{E} も時間的に変化する。
⇒ 変位電流 \mathbf{i}_d が生じる。

§4.2 ではこれを無視していたが、 $|\mathbf{i}_d| \ll |\mathbf{i}|$ であればよい。

ここで、電場が振動していて、

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\mathbf{E}_0 = \text{定数ベクトル}) \quad (29)$$

と表わされるとしよう。式 (28) より、

$$\mathbf{i}(t) = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t. \quad (30)$$

変位電流は、

$$i_d(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}_0 \cos \omega t. \quad (31)$$

$i(t)$ と $i_d(t)$ の振幅を比較して、

$$\varepsilon_0 \omega \ll \sigma \quad (32)$$

であれば、変位電流を無視してよい。

準定常電流

変位電流を無視してもいいような電流。

電気伝導率 σ は (20°C で)、

| | 鉄 | 銅 | アルミニウム |
|--------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\sigma (\Omega^{-1} \text{m}^{-1})$ | 1.0×10^7 | 5.8×10^7 | 3.6×10^7 |

$\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ として, 式 (32) より,

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim \frac{10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}}{10^{-11} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}} = 10^{18} \text{s}^{-1}. \quad (33)$$

(紫外線の振動数に相当.)

家庭用の交流は 60(50) Hz.

$$\omega \sim 2\pi \times 60 \text{s}^{-1} \sim 10^2 \text{s}^{-1} \ll 10^{18} \text{s}^{-1}. \quad (34)$$

⇒ 変位電流を無視してよい.