

4.2 インダクタンス

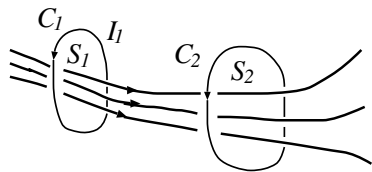
電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 4 章 電磁誘導

4.2.1 相互インダクタンス



2つの回路 C_1 , C_2 を考える. C_1 に電流 I_1 を流すと磁束密度 B_1 (ベクトルポテンシャル A_1) が生じる. このとき, C_2 を貫く磁束 Φ_{21} は, I_1 に比例する.

相互インダクタンス (相互誘導係数)

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1, \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\Leftarrow (3.3.24)$$

$$= \oint_{C_2} \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) I_1$$

注) 2つの回路の形状や相対的配置のみに依る.

逆に C_2 に電流 I_2 を流すと, C_1 を貫く磁束は, (I_2 の作る磁場を B_2 , ベクトルポテンシャルを A_2 として)

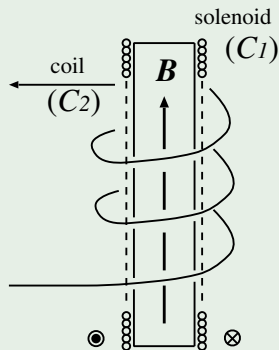
$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{S}_1 = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 \quad (3) \\ &= \oint_{C_1} \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) I_2 \\ &= M_{12} I_2\end{aligned}$$

つまり,

相互インダクタンスの対称性

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = M_{21} (=: M). \quad (4)$$

例 1: ソレノイドに巻いたコイル



ソレノイド (C_1) の断面積 S , 巻数 N_1 , 長さ ℓ , 電流 I_1 とし, コイル (C_2) の巻き数を N_2 とする.

$$M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{\ell} (= M_{12}). \quad (5)$$

(3. 3. 53) より, $B = \mu_0(N_1/\ell)I_1$. ソレノイドの磁束は BS で, これは全てコイルを N_2 回貫く.

$$\Phi_{21} = N_2 BS = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{\ell} I_1. \quad (6)$$

よって, 式 (5) を得る. (M_{12} を直接計算することは難しいが, 式 (4) より, $M_{12} = M_{21}$ となる.)

インダクタンスの単位

$$1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} =: 1 \text{ H (ヘンリー)}. \quad (7)$$

回路間の電磁誘導

電流 I_1 が変化すると,

$$\Phi_{21}(t) = MI_1(t). \quad (8)$$

このために C_2 に生じる起電力は,

$$\phi_{\text{em},21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}. \quad (9)$$

⇒ C_2 にも電流が流れる。(逆も同様.)

4.2.2 自己インダクタンス

I_1 による磁束で C_1 自身を貫くものは I_1 に比例する。

自己インダクタンス

$$\Phi_{11} = M_{11}I_1 = L_1I_1 \quad (L_1 := M_{11}) \quad (10)$$

同様に、 $\Phi_{22} = M_{22}I_2 = L_2I_2$ 。

回路が1つのとき

$$\Phi = LI. \quad (\text{常に } L > 0) \quad (11)$$

このとき、回路に生じる起電力は、

$$\phi_{\text{em}} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (12)$$

すなわち、インダクタンス(コイル)に電流を流そうとすると、逆起電力が生じる。

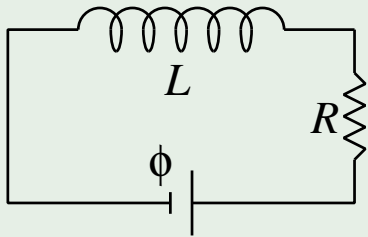
例 1: ソレノイドの自己インダクタンス

(3. 3. 53) より, $B = \mu_0 nI$. 断面積を S とすると, 単位長さ当りの L は,

$$L_{\text{単位}} = \frac{\Phi_{\text{単位}}}{I} = \frac{nBS}{I} = \mu_0 n^2 S. \quad (13)$$

注) これを式 (1) で $C_1 = C_2$ として求めることはできない. 一般には導線の太さを考えて, その中での i を用いて計算する必要がある.

例 2: RL 回路



回路中の全起電力は式 (12) より, $\phi - L(dI/dt)$. オームの法則より,

$$RI(t) = \phi - L \frac{dI}{dt}. \quad (14)$$

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{\phi}{L}. \quad (15)$$

$\phi/L = 0$ のときの解は, $ae^{-Rt/L}$. これに定数 b を加えて,

$$I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + b. \quad (16)$$

式 (15) に代入して,

$$\frac{R}{L}b = \frac{\phi}{L} \Rightarrow b = \frac{\phi}{R} \Rightarrow I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\phi}{R}. \quad (17)$$

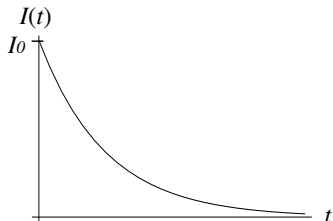
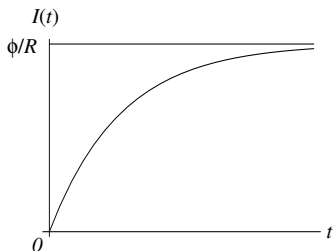
$I(0) = 0$ とすると, $a = -\phi/R$. よって,

$$I(t) = \boxed{\phantom{I(t) = \phi/R (1 - e^{-t/\tau})}} \quad (18)$$

$\tau := L/R$ を緩和時間という.

$I(0) = I_0$ で $\phi = 0$ のときは, 式 (17) より,

$$I(t) = \boxed{\phantom{I(t) = I_0 e^{-t/\tau}}} \quad (19)$$



例3: 変圧器 (トランス) の原理

§§4. 2. 1 の例1で, ソレノイド (C_1) に外部起電力 ϕ_1 を与えたとする.

$$\phi_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0. \quad (\text{電位の一意性}) \quad (20)$$

このとき, コイル (C_2) に誘導される起電力 $\phi_{\text{em},21}$ は式 (9),

$$\phi_{\text{em},21} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

よって,

$$\frac{\phi_{\text{em},21}}{\phi_1} = -\frac{M}{L_1}. \quad (21)$$

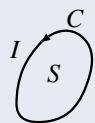
式 (5), (13) を用いると,

$$\frac{\phi_{\text{em},21}}{\phi_1} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S / \ell}{\mu_0 (N_1 / \ell)^2 S \ell} = -\frac{N_2}{N_1}. \quad (22)$$

すなわち, C_2 に発生する起電力は巻数の比に比例する. (電圧が自由に変えられる. 交流の利点.)

4.2.3 インダクタンスのエネルギー

インダクタンスのエネルギー (1つの回路の場合)



回路 C に電流 I が流れているとき,

$$U = \frac{1}{2} LI^2. \quad (23)$$

証明のアイデア: 式 (4. 1. 30) を用いる.

証明: 式 (4. 1. 30) より,

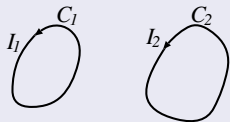
$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

⇐ ストークスの定理

$$= \frac{1}{2} I \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} LI^2.$$

Φ は C を貫く磁束で、式 (11) を使った. (証明終)

インダクタンスのエネルギー (2つの回路の場合)



$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2. \quad (25)$$

証明: 式 (4. 1. 30) より,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2}I_1 \oint_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}I_2 \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &\quad (C_1 \text{ を貫く磁束}) \quad (C_2 \text{ を貫く磁束}) \\ &= \frac{1}{2}I_1(\Phi_{11} + \Phi_{12}) + \frac{1}{2}I_2(\Phi_{21} + \Phi_{22}) \\ &\quad (\Phi_{1j}, \Phi_{2j} \text{ は } I_j \text{ による磁束}) \\ &= \frac{1}{2}I_1(L_1I_1 + MI_2) + \frac{1}{2}I_2(MI_1 + L_2I_2) = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2. \end{aligned} \quad (26)$$

(証明終)

例 1: ソレノイド

単位長さ当りのエネルギーは,

$$U_{\text{単位}} = \frac{1}{2} L_{\text{単位}} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S I^2. \quad \text{cf. (4. 1. 32)} \quad (27)$$

逆に (4. 1. 32) からソレノイドの $L_{\text{単位}}$ を求めることもできる.

自己インダクタンスと相互インダクタンスの関係

$$L_1 L_2 > M^2. \quad (28)$$

証明のアイデア: 回路に電流を流すとき, 必ず仕事 (> 0) をするから, 回路のエネルギーは常に正であることを用いる.

証明: 2つの回路のエネルギーは,

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2. \quad (29)$$

これを変形して,

$$U = \frac{1}{2}L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2. \quad (30)$$

$U > 0$ より,

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} > 0 \implies L_1 L_2 > M^2. \quad (L_1 > 0) \quad (31)$$

(証明終)

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad |k| < 1 \quad (\text{結合係数}) \quad (32)$$

と書くこともできる.