

# 第4章 電磁誘導

# 4.1 ファラデーの電磁誘導の法則

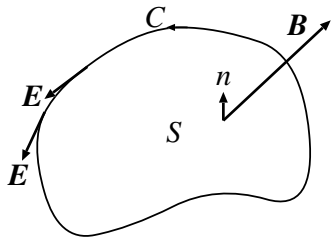
電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

## 第 4 章 電磁誘導

## 4.1.1 ファラデー (Faraday) の法則



閉曲線  $C$  とそれに囲まれた面  $S$  を考える． $C$  が導線の回路だと考え、回路中の単位電荷に働くローレンツ力の接線成分を回路につき 1 周積分したものをその回路の起電力  $\phi_{em}(t)$  という．

### 起電力

$$\phi_{em}(t) = \oint_C [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathbf{r}. \quad (1)$$

単位は V(ボルト)．

注 1)  $C$  が実際の導線回路でなくても空間内の閉曲線について  $\phi_{em}$  を考えることができる．

注 2) 静電場であれば、第 1 項はゼロ．

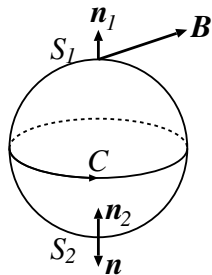
磁束密度  $B$  の  $S$  の法線方向の成分を、 $S$  上で積分したものを  $C$  を貫く磁束  $\Phi(t)$  という。

## 磁束

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \left( = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \right). \quad (2)$$

単位は Wb(ウェーバー)。

$\Phi(t)$  は  $S$  のとり方によらない。



$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_1, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_2. \quad (3)$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \quad (4)$$

閉曲面  $S_1 + S_2$  を考えて、その単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$  に注意すると、

$$\begin{aligned}
\Phi_1 - \Phi_2 &= \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1+S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1+S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
&\Leftarrow (\text{ガウスの定理}) \\
&= \int_{V_{1+2}} \nabla \cdot \mathbf{B} dV \quad (V_{1+2} \text{ は } S_1 + S_2 \text{ の内部の領域}) \\
&\Leftarrow \text{式 (3. 3. 25)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

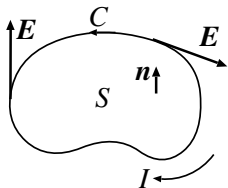
## ファラデーの法則 (電磁誘導現象)

$$\phi_{\text{em}} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{6}$$

起電力と磁束の関係．閉回路に発生する起電力はその回路を貫く磁束の時間変化率に比例する．

## レンツ (Lentz) の法則

$\phi_{em}$  は磁束の変化を妨げる方向に発生する。



$\frac{d\Phi}{dt} > 0$  のとき,  $\phi_{em} < 0$  で電流は  $C$  の向きの逆向きに流れる.  $I$  の作る  $B$  は  $B \cdot n < 0$  の方向で,  $\Phi$  を減少させる.  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$  のとき,  $\phi_{em}$  は  $\Phi$  を増やそうとする.

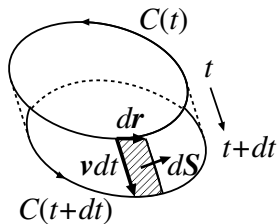
## $\frac{d\Phi}{dt}$ の2つの成分

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \left( \int_S d\mathbf{S} \right) \cdot \mathbf{B} \\ &=: \frac{d\Phi_B}{dt} + \frac{d\Phi_C}{dt}.\end{aligned}\tag{7}$$

第1項は,  $B$  の時間変化による寄与.

第2項は, 回路の運動の寄与.

## 4.1.2 磁場中を運動する回路



式(7)の第2項. 回路  $C$  が速度  $\mathbf{v}$  で移動. ( $\mathbf{v}$  は回路中で異っていてもよい.) 微小時間  $dt$  の間の  $C$  の線素  $d\mathbf{r}$  の変位は  $\mathbf{v}dt$ . これに伴う面要素は  $d\mathbf{S} = (\mathbf{v}dt) \times d\mathbf{r}$ . 従って, 磁束の変化は,

$$d\Phi_C = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})dt. \quad (8)$$

よって,

$$\frac{d\Phi_C}{dt} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) = - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (9)$$

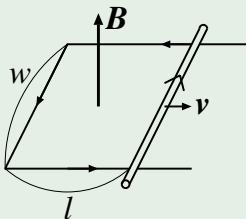
問: 最後の等号を示せ. 式(6)は,

$$\phi_{\text{em}} = - \frac{d\Phi_C}{dt} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (10)$$

これは、式(1)の右辺第2項に相当する。

⇒ ファラデーの法則のうち、回路の運動による部分はローレンツ力で理解できる。

## 例1: 静磁場中でレール上を転がる導体棒



$$\Phi = Bwl. \quad (11)$$

よって、式(6)より、 $v = dl/dt$ を用いて

$$\phi_{\text{em}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bw\frac{dl}{dt} = -Bwv. \quad (12)$$

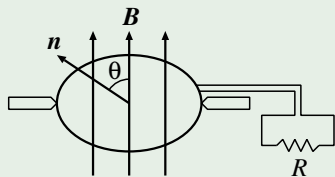
(矢印の反対向き)

ローレンツ力で考えると、

$$\phi_{\text{em}} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = -wvB. \quad (13)$$



## 例 2: 交流発電機



図のような静磁場中で回転するコイルを考える．コイルの法線と  $B$  のなす角度を  $\theta$  とし，コイルの面積を  $S$  とする．

$$\Phi = BS \cos \theta. \quad (14)$$

一定の角速度  $\omega$  でコイルが回転しているとして， ( $\theta = \omega t$ )

$$\phi_{\text{em}} = \omega BS \sin \omega t. \quad \text{交流} \quad (15)$$

このコイルに抵抗  $R$  を接続すると，電位差  $V = \phi_{\text{em}}$  だから，

$$V = \omega BS \sin \omega t = V_0 \sin \omega t, \quad V_0 := \omega BS, \quad (16)$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t. \quad (\text{オームの法則を用いた}) \quad (17)$$

発電機がする仕事率は、コイルの電荷に働く力を  $F$ 、速度を  $v$ 、単位長さ当りの電荷の数を  $n$  とすると、

$$dP = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} n dr = nv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}) \quad (18)$$

これをコイルについて積分すると、( $q$  を電荷として)

$$\begin{aligned} P &= \oint nv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint qnv \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{r} = I \oint \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{r} \\ &= I\phi_{\text{em}} = IV. \quad \text{cf. (3. 1. 22)} \end{aligned} \quad (19)$$

一方、コイルを回すのに必要な力学的仕事率は、

$$\frac{dW}{dt} = \text{トルク} \times \text{角速度} = ISB \sin \omega t \times \omega = IV. \quad (20)$$

(§§3. 2. 2 例1の結果を使った.)

## 4.1.3 微分形のファラデーの法則

### 微分形のファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (21)$$

証明のアイデア: ファラデーの法則の両辺を  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  で書き, ストークスの定理を用いる.

証明: 式 (6) は, 式 (1), (7), (9) を用いて,

$$\begin{aligned} \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt} - \frac{d\Phi_C}{dt} \\ &= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (22)$$

よって,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (23)$$

これがファラデーの法則のうちでローレンツ力では解釈できない部分である。ストークスの定理を用いれば、

$$\int_S \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (24)$$

$S$  は任意ゆえ、式 (21) を得る。(証明終)

磁場が時間的に変化すれば電場ができる。

定常的な場合、 $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$  ゆえ  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  で静電場の式に戻る。

まとめ：常に正しい電磁誘導に関する式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

## 4.1.4 磁場のエネルギー

### 磁場のエネルギーとエネルギー密度

$$U_m = \int u_m dV, \quad u_m := \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2. \quad (\text{常に正しい式}) \quad (25)$$

cf. 式 (2. 9. 8)

証明のアイデア: 電流の仕事率, 式 (3. 1. 20) で, 電荷へのエネルギー供給源が磁場である場合を考え, このとき磁場のエネルギーが減少することを示す。

証明: 電流の仕事率は

$$\frac{dW}{dt} = P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dV \quad (26)$$

アンペールの法則, 式 (3. 3. 42) を用いると,

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV + \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dV
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

(公式  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  を用いた.)

問: この公式を示せ.)

ガウスの定理と式 (21) を用いて

$$P = -\frac{1}{\mu_0} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV$$

電荷と電流が有限の範囲にあるとすれば第 1 項はゼロ.

( $|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \sim 1/r^4$ ) よって,

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2) dV = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}^2 dV.
 \tag{28}$$

磁場のエネルギーを  $U_m$  とすると、

$$dW = Pdt = -dU_m \quad (29)$$

ゆえ、式 (25) を得る。(証明終)

注) 上ではアンペールの法則と書いたが、正確には定常的でない場合にも成立するアンペール・マクスウェルの法則 (第 5 章参照) を用い、磁場に関係する部分を見るとこの結果が得られる。従って、式 (25) は静磁場でない場合も正しい。

### 静磁場、定常電流の場合の磁場のエネルギーの別の表式

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} dV. \quad (30)$$

cf. 式 (2. 9. 5)

証明のアイデア: 磁場  $B$  とベクトルポテンシャル  $A$  について、 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = B^2 - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  を用いる。

証明: 上の式でさらにアンペールの法則、式 (3. 3. 42) を用いると、

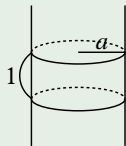
$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - \mu_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}. \quad (31)$$

よって,

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} dV.$$

第1項はゼロ(ガウスの定理). よって, 式(30)を得る. (証明終)

## 例1: ソレノイドのエネルギー



半径  $a$ , 単位長さ当り  $n$  回巻いてあるとする.  
単位長さ当りのエネルギーは,

$$U_{\text{単位}} = \frac{\mu_0}{2} \pi a^2 n^2 I^2. \quad (32)$$

§§3. 3. 4 例2より

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}, & R < a \text{ (内部)}, \\ 0, & R > a \text{ (外部)}. \end{cases} \quad (33)$$

$$U_{\text{単位}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{単位}} \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 I^2 \pi a^2 = \frac{\mu_0}{2} \pi a^2 n^2 I^2. \quad (34)$$