

3.2 ローレンツ力

電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 3 章 定常電流と静磁場

3.2.1 電荷に働く力

静止している電荷 q ($v = 0$)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (\text{クーロン力}) \quad (1)$$

速度 v で動いている電荷 q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = \text{磁束密度 (磁場)}. \quad (2)$$

速度に比例し、速度に垂直な(仕事をしない)力がある。
式(2)は電磁場 (\mathbf{E} , \mathbf{B}) が時間によっているときも正しい。

ローレンツ (Lorentz) 力

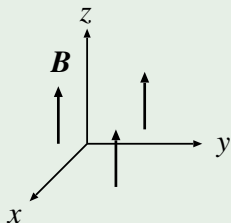
$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad \mathbf{r} = \text{電荷の座標}, \quad t = \text{時間}. \quad (3)$$

磁束密度 B の単位

$$\frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}} \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb(ウェーバー)}}{\text{m}^2} =: \text{T(テスラ)}. \quad (4)$$

(Wb:=Nm/A=J/(C/s)=Vs)

例 1: 一様な定常磁場中の点電荷の運動



$B = (0, 0, B)$ の中を, 質量 m の点電荷 q が運動している.
磁力線に巻きつくような螺旋運動を行なう.

速度を v とすると, 運動方程式は,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B) = (v_y B, -v_x B, 0)$ ゆえ、式(5)を成分で書くと、

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0, \quad \omega := \frac{q}{m} B. \quad (6)$$

z 方向の運動は、

$$v_z = v_{z0} \text{ (定数)}. \quad (7)$$

v_y を消去すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} v_x = -\omega^2 v_x. \quad (8)$$

よって、

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega t + \beta), \quad v_y = -v_{\perp} \sin(\omega t + \beta). \quad (v_{\perp}, \beta \text{ は定数}) \quad (9)$$

(注: $v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2$. v_{\perp} は速度の z 軸に垂直な成分の大きさ.)

これを t で積分して、

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \beta) + x_0, \quad y = \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \beta) + y_0. \quad (10)$$

(x_0, y_0 : 定数) これより、

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2. \quad (11)$$

すなわち、半径 $v_{\perp}/\omega = v_{\perp} m / (qB)$ の円. z 方向は式 (7) より、

$$z = v_{z0} t + z_0, \quad \text{等速運動.} \quad (12)$$

よって、一定の半径のらせん運動をする.

点電荷の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2} (v_{\perp}^2 + v_{z0}^2) = \text{一定.} \quad (13)$$

(磁場による力は仕事をしない.)

3.2.2 磁場中の電流に働く力

電流素片に働く力

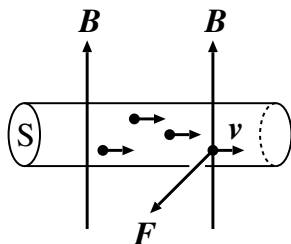
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} dr, \quad I d\mathbf{r} := I d\mathbf{r}. \quad (14)$$

証明のアイデア: 1個の点電荷が受ける力を考えて、式(3.1.4)を用いる。

証明: 点電荷 q が平均速度 \mathbf{v} で移動していると考えると、1個の電荷が受ける力は、 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. 電荷の数密度を n とすると微小体積 dV の受ける力は、(ndV が電荷の個数)

$$ndVq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} dV. \quad (15)$$

(式(3.1.4)を用いた.)

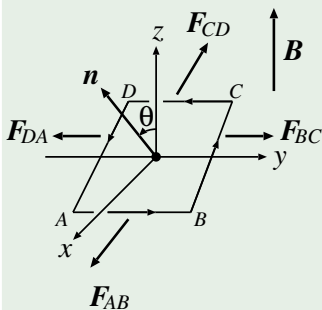


式 (3. 1. 21) のように断面 S について積分すると、電流素片が受ける力は、

$$d\mathbf{F} = \int_S \mathbf{i} \times \mathbf{B} dS dr = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}. \quad (16)$$

となり、後は $I d\mathbf{r} := I d\mathbf{r}$ を用いればよい。(証明終)
(q に依存しないことに注意.)

例 1: ループ電流に働く力



一様な磁場中の長方形ループ電流 $ABCD$ を考える. $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. $AB = a$, $BC = b$. ループ面は y 軸を通り, その法線ベクトル \mathbf{n} は z 軸と角度 θ をなす. このとき, ループ電流にはトルク

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (17)$$

が働く. ただし,

$$\mathbf{m} := Iab\mathbf{n}. \quad \text{磁気双極子モーメント} \quad (18)$$

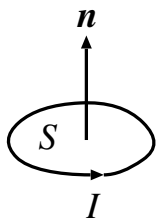
導線 AB に働く力は、 CD に働く力と逆向きで同じ大きさ。 BC と DA も同様。 従って、ループ全体に働く力はゼロ。 しかし、 y 軸のまわりに回転させようとするトルク (偶力) がある。

$$F_{AB} = F_{CD} = IBa. \quad (19)$$

よって、トルクは、

$$\mathbf{T} = -\hat{y}IBa b \sin \theta = -\hat{y}IabB \sin \theta = Iab\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (20)$$

平面回路を流れる電流の磁気双極子モーメント



平面回路の面積を S 、電流を I 、法線ベクトルを \mathbf{n} (右ねじの進む方向) とすると、

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}, \quad \text{単位: Am}^2. \quad (21)$$

cf. 電気双極子モーメント

(遠方から見ると、ループ電流 \sim 小さい棒磁石)