

第3章 定常電流と静磁場

3.1 電流と電荷保存則

電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

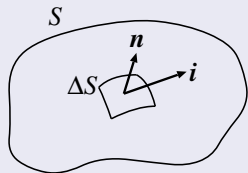
<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 3 章 定常電流と静磁場

3.1.1 電流と電流密度

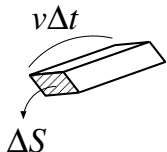
電流密度 $i(\boldsymbol{r}, t)$

単位時間に単位面積を(垂直に)通る電荷の量(ベクトル). 単位は $\text{C}/(\text{m}^2\text{s})$.



時間 Δt の間に面 ΔS (法線ベクトル \boldsymbol{n}) を通って流れる電荷の量は,

$$\Delta q = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \Delta t = \boldsymbol{i} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \Delta t. \quad (1)$$



一方, 電荷分布を ρ として, その電荷の平均移動速度を v とすると,

$$\Delta q = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \Delta t = \rho \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \Delta t. \quad (2)$$

よって,

$$\mathbf{i} = \rho \mathbf{v}. \quad (3)$$

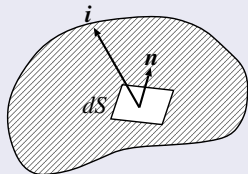
電荷分布が(電子のような)点電荷からなっていて, その電荷を q , 平均速度を \mathbf{v} , 数密度を n とすると,

$$\mathbf{i} = nq\mathbf{v}. \quad (4)$$

電流 I

ある面 S を単位時間に通る電荷の量.

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5)$$



単位は A(アンペア):=C/s.

3.1.2 電荷保存則

電荷の総量は変化しない。これを式で表すと、

電荷保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (6)$$

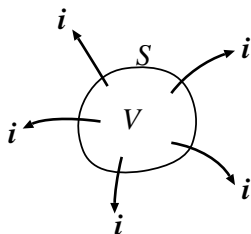
(連続の方程式の一種。)

証明のアイデア: 式 (5) で閉曲面を考え、ガウスの定理を適用する。

証明: 閉曲面 S から流れ出す電流を考える。

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7)$$

これは、 S に囲まれた領域 V 内の単位時間あたりの電荷の減少に等しいはず。



$$\int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt}, \quad Q_{\text{int}} = \int_V \rho dV. \quad (8)$$

左辺にガウスの定理を適用すると、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{i} dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (9)$$

V が時間的に変化しなければ、微分と積分の順序を交換でき、

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (10)$$

V は任意ゆえ、式(6)を得る。(証明終)

定常電流

$\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{r})$, $\rho = \rho(\mathbf{r})$ (t によらない). このとき、式(6)より、

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (11)$$

定常電流にはわき出しがない。つまり、閉じた経路に沿って流れるループになっている。

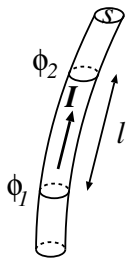
3.1.3 オーム (Ohm) の法則

オームの法則

電場をかけると電流が流れるような物質について、

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \sigma = \text{電気伝導率 (物質定数)}. \quad (12)$$

(電場が強いと成り立たない場合もある。) 定常電流でない場合にも、時間的変動がゆっくりであれば成り立つ。



断面積 S の一様な (細い) 導線を考える. 距離 l の 2 点の電位差を $V = \phi_1 - \phi_2$ として, 流れる電流を I とする. 電場は,

$$E = \frac{V}{l}. \quad (13)$$

電流密度は,

$$i = \frac{I}{S}. \quad (14)$$

$i = \sigma E$ より,

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{\ell}. \quad (15)$$

$$R := \frac{\ell}{\sigma S} \text{ (電気抵抗)} \quad (16)$$

を用いると,

オームの法則

$$V = RI. \quad (17)$$

R の単位は $V/A =: \Omega$ (オーム). σ の単位は $1/(\Omega m)$.

電流のする仕事率 P (単位時間あたりの仕事)

$$P = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV = \int \frac{\mathbf{i}^2(\mathbf{r})}{\sigma} dV. \quad (18)$$

2番目の等号では、式(12)を用いた。

証明のアイデア: 電場がする仕事を考える。

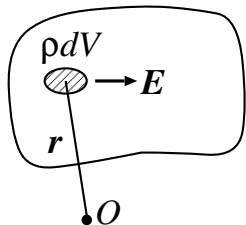
証明: 電場がする仕事は、(ρdV は電荷, $d\mathbf{r}$ は変位)

$$dW = \rho dV \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (19)$$

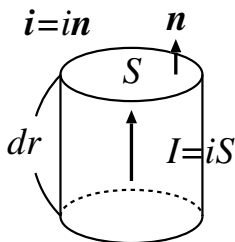
電流の仕事率は、($\rho d\mathbf{r}/dt = \rho \mathbf{v} = \mathbf{i}$)

$$P = \frac{d}{dt} \int_V dW = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt} dV = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV. \quad (20)$$

(証明終)



細い一様な導線の場合



E は S 上で一定だから、断面の積分を実行すると、

$$\int_S \mathbf{i} dS dr = \mathbf{n} iS dr = I \mathbf{n} dr = I d\mathbf{r}. \quad (21)$$

$I d\mathbf{r} (= I \mathbf{n} dr)$ を電流素片と呼ぶ。

$$P = I \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}. \quad (22)$$

P の単位は $J/s=W$ (ワット)。

電流のした仕事は、金属などの場合、伝導電子(自由電子)とイオンとの衝突により、熱エネルギー(ジュール熱)になる。