

2.9 静電エネルギー

電磁気学詳論 I (2023)

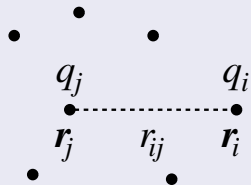
田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 2 章 静電場

2.9.1 電荷分布のエネルギー

点電荷系のエネルギー



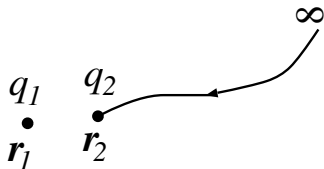
$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|. \quad (1)$$

証明のアイデア: まず1対の点電荷について考える。

証明: 点電荷対のエネルギーは, q_1 を固定して考えると, 無限遠から q_2 を r_2 まで移動させるのに必要な仕事だから,

式(2.4.6)で $r_A \rightarrow \infty$, $r_B = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r_{12}$, $q = q_1$ として,

$$U_e = q_2 w = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (2)$$



次に点電荷が3個以上あるときを考える。1つの電荷 q_i に働く力は $q_j (j \neq i)$ から受ける力の和であるから、 q_i を無限遠から r_i まで運ぶのに必要な仕事は、 $q_j (j \neq i)$ と q_i の対のエネルギーの和になる。従って、全静電エネルギーは、

$$U_e = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|. \quad (3)$$

ここで、最初の和、 $\sum_{i < j}$ は、すべての対についての和を表わしている。2番目の和、 $\sum_{i \neq j}$ に $\frac{1}{2}$ の因子がかかっているのは、各対について2回数えているからである。(証明終)

また、

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i(\mathbf{r}_i), \quad \phi_i(\mathbf{r}_i) := \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (4)$$

とも書ける。 $\phi_i(\mathbf{r}_i)$ は q_i 以外の電荷が \mathbf{r}_i に作るポテンシャル。

連続的な電荷分布のエネルギー

$$U_e = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV. \quad (5)$$

∴ 式(1)で和を積分に置き換えて,

$$U_e = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_1 dV_2. \quad (6)$$

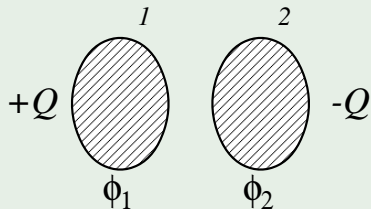
後は, 式(2.4.19)

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_2$$

用いればよい.

例: コンデンサーのエネルギー

導体外では $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ゆえ,



$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\text{導体 1}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \quad (7) \\ + \frac{1}{2} \int_{\text{導体 2}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \phi_1 \int_{\text{導体 1}} \rho(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \phi_2 \int_{\text{導体 2}} \rho(\mathbf{r}) dV$$

(導体は等ポテンシャル)

$$= \frac{1}{2} \phi_1 Q - \frac{1}{2} \phi_2 Q = \frac{1}{2} Q(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= \frac{Q^2}{2C} \quad \Leftarrow Q = C(\phi_1 - \phi_2).$$

cf. (2. 8. 28)

2.9.2 電場のエネルギー密度

Q. エネルギーはどこにあるのか？

A. 静電場ではどこともいえない。

式 (5) では電荷に付随しているように見える。しかし、電磁波は電荷のない空間を伝わり、エネルギーを運ぶ。

⇒ 場に付随させるほうがもっともらしい。

電場のエネルギーとエネルギー密度

$$U_e = \int u_e(\mathbf{r}) dV, \quad u_e(\mathbf{r}) := \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (8)$$

(これは静電場以外にも拡張できる。)

証明のアイデア: ポアソン方程式を用いて、式 (5) から ρ を消去する。

証明: ポアソン方程式 $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$ を用いると、

$$U_e = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dV = -\frac{1}{2}\epsilon_0 \int (\Delta\phi)\phi dV. \quad (9)$$

$\phi\Delta\phi = \phi\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - (\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi)$ を用いると、

$$U_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) dV - \int (\nabla\phi)^2 dV \right]. \quad (10)$$

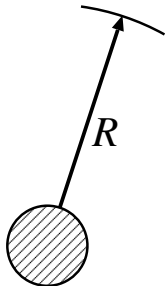
$\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を用いて、

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \nabla \cdot (\phi\mathbf{E}) dV + \int \mathbf{E}^2 dV \right]. \quad (11)$$

第1項の積分は、ガウスの定理を用いて、

$$\int_V \nabla \cdot (\phi\mathbf{E}) dV = \int_S \phi\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

電荷分布が有限の範囲にあるとして、 V として十分大きな球(半径 R)をとる。 S は半径 R の球面。十分遠方では点電荷のように見えるはずだから、



$\phi \sim 1/R$, $E \sim 1/R^2$, $\int dS \sim R^2$. よって, この積分は ($R \rightarrow \infty$ として) ゼロ. (証明終)

例: 一様に帯電した球

半径 a , 電荷密度 ρ . §§2. 5. 2 の例 1, 式 (2. 5. 27) の E から,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2(r) 4\pi r^2 dr & (13) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^a \frac{r^2}{a^6} 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \quad \text{cf. 式 (2. 8. 32)} \end{aligned}$$

($a \rightarrow 0$ の極限で電荷 Q の点電荷となるが, このとき, $U_e \rightarrow \infty$.)