

2.8 コンデンサー

電磁気学詳論 I (2023)

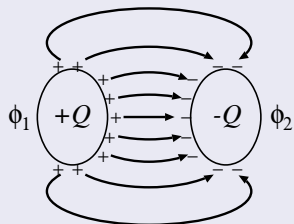
田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 2 章 静電場

2.8.1 コンデンサーの静電容量

コンデンサー (condenser, capacitor)



2つの導体があってそれぞれに $+Q (> 0)$, $-Q$ の電荷があり, 一方から出た電気力線が必ず他方に入るような系. 2つの導体をその大きさに較べて十分近づけると (近似的に) コンデンサーになる.

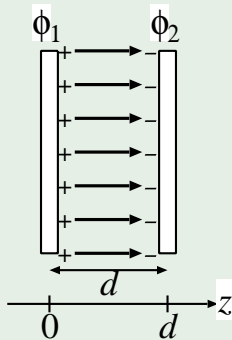
コンデンサーの静電容量

導体 1(2) の電位を $\phi_{1(2)}$ とすると ($\phi_1 > \phi_2$), $Q \propto \phi_1 - \phi_2$. (\because 重ね合わせの原理)

$$C := \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \quad (1)$$

静電容量の単位は, F(ファラッド)=C(クーロン)/V(ボルト).

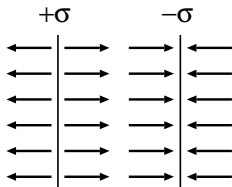
例 1: 平行板コンデンサー



極板 (導体板) の大きさに比べて d が十分小さいとすれば, 端の効果は無視できて, 無限に広い導体板についての結果を利用できる. §§2. 5. 2 の例 3 から, 電荷面密度 σ , $-\sigma$ の 2 枚の導体板を平行にして置くと, 重ね合わせの原理から, 導体板間の電場は導体板に垂直で一様. その大きさは, 式 (2. 5. 32) より,

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

両導体板の外側では,



$$\mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

電位差は,

$$\phi_1 - \phi_2 = - \int_{\text{極板 2}}^{\text{極板 1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_d^0 E_z dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (4)$$

極板の面積を A とすると, 極板の電荷は,

$$Q = \sigma A = \frac{\epsilon_0 A}{d} (\phi_1 - \phi_2). \quad (5)$$

(確かに電位差に比例している.)

平行板コンデンサーの静電容量

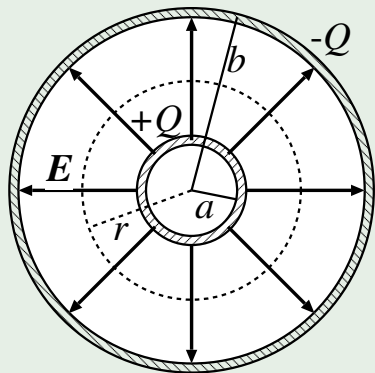
式(1)より,

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (6)$$

$A = 1 \text{ m}^2$, $d = 10^{-4} \text{ m} (= 0.1 \text{ mm})$ とすると,

$$C \simeq 9 \times 10^{-12} \cdot \frac{1}{10^{-4}} \sim 10^{-7} \text{ F} = 0.1 \text{ } \mu\text{F} \quad (7)$$

例2: 球形コンデンサー (同心導体球面)



よって,

内側の導体: 半径 a , 電荷 $+Q (> 0)$.

外側の導体: 半径 b , 電荷 $-Q$.

対称性から $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$. (動径方向を
向き, その大きさは r のみの関数)

積分形のガウスの法則

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (8)$$

を半径 $r (a < r < b)$ の球面に適用す
ると,

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (9)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (10)$$

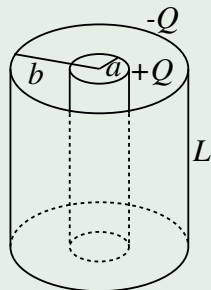
これを積分して、電位差は、

$$\phi(a) - \phi(b) = - \int_b^a E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}. \quad (11)$$

静電容量は、

$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (12)$$

例3: 円筒形 コンデンサー



十分に長い2つの同軸円筒極板からなるコンデンサーを考える。長さ L 、内側の極板の半径 a 、外側の極板の半径 b とし、内側の極板に電荷 $+Q$ 、外側の極板に電荷 $-Q$ を与える。 E は中心軸に垂直で動径方向を向き、 $E = E(R)$ (R : 中心軸からの距離)。半径 R ($a < R < b$)、長さ L の円筒を考えて、ガウスの法則を適用すると、

$$2\pi R L E(R) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (13)$$

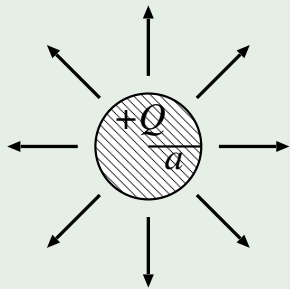
よって,

$$E(R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L R}. \quad (14)$$

$$\phi(a) - \phi(b) = - \int_b^a E(R) dR = \boxed{}. \quad (15)$$

$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = \boxed{}. \quad (16)$$

例4: 孤立した導体球の静電容量



半径 a , 電荷 Q とする. 仮想的に半径無限大の球面に $-Q$ の電荷があると考える.

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r > a). \quad (17)$$

ポテンシャルは $r = \infty$ を起点として,

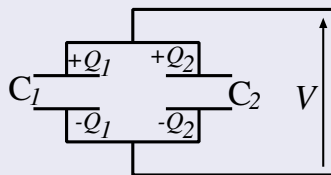
$$\phi(a) - \phi(\infty) = - \int_{\infty}^a E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (18)$$

$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(\infty)} = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (19)$$

(式(12)で $b \rightarrow \infty$ としたものの.)

2.8.2 容量の合成則

並列接続



$$C = C_1 + C_2. \quad (20)$$

∵ 電位差を V として, $Q = CV$ から,

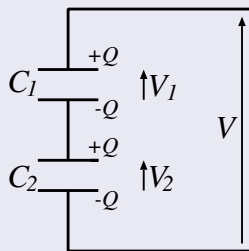
$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V. \quad (21)$$

全体の容量 C は,

$$Q_1 + Q_2 = CV. \quad (22)$$

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2. \quad (23)$$

直列接続



$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (24)$$

あるいは,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (25)$$

とも書ける,

$\therefore C_1$ の電位差 V_1 , C_2 の電位差 V_2 とすると

$$Q = C_1 V_1, \quad Q = C_2 V_2, \quad (26)$$

$V = V_1 + V_2$ より, 全体の容量 C は,

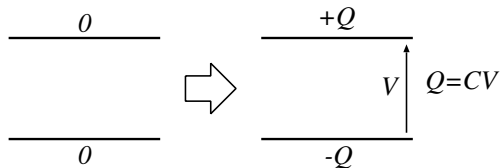
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (27)$$

2.8.3 コンデンサーのエネルギー

コンデンサーのエネルギー

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \quad (28)$$

証明のアイデア: コンデンサーの電荷が0の状態から電荷を極板間で移動させて、電荷を Q にするために必要な仕事を評価する。



証明: 極板の電荷が Q' のときに、微小電荷 dQ' を下の極板から上の極板へ運ぶのに必要な仕事は、

$$dU = V' dQ' = \frac{Q'}{C} dQ'. \quad (29)$$

これを積分して,

$$U = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{Q^2}{2C}. \quad (30)$$

$Q = CV$ を用いると,

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (31)$$

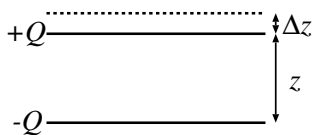
と書くこともできる. (証明終)

例 1: 帯電した孤立導体球のエネルギー

半径 a , 電荷 Q とすると, 式 (19) より,

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \quad (32)$$

応用: 平行板コンデンサーの極板間に働く力



極板間の距離を Δz だけ増やすのに必要な仕事は, (力の大きさを F として)

$$\Delta W = F \Delta z. \quad (33)$$

これはコンデンサーのエネルギーの変化 ΔU に等しい. $U = Q^2/(2C)$ から, (Q は変化しないから)

$$F \Delta z = \Delta U = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (34)$$

すなわち,

$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (35)$$

(容量の変化が分かればよい.) $C = \epsilon_0 A/z$ (式(6)) であるから,

$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{\epsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C} \frac{1}{z}. \quad (36)$$

2.8.4 誘電体

誘電体 (dielectrics)

コンデンサーの極板間を絶縁体 (電気を通さない物質, 自由な電荷のない物質) で満たすと, 静電容量が変化する. (極板間の電場が変化するため.) このような物質を誘電体という.

平行板コンデンサーでは, 極板間が真空のとき, $C_0 = \epsilon_0 A/d$ であったから, $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ と変化したと考えられる. すなわち, 誘電体で極板間を満たすと,

$$C = \epsilon \frac{A}{d}, \quad \epsilon = \text{誘電率 (物質定数)}. \quad (37)$$

一般に

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} : \text{比誘電率}. \quad (38)$$

(コンデンサーの形状によらない. 誘電体の種類による.)

比誘電率の例

比誘電率

| | |
|----------|--------------------|
| 雲母 | ~ 9 |
| パラフィン | ~ 2 |
| エチルアルコール | ~ 20 |
| 水 | ~ 80 |
| 空気 | 1.0005 (1 気圧 20°C) |
| (真空) | (1) |

通常，比誘電率 > 1 となる。