

## 2.4 静電ポテンシャル

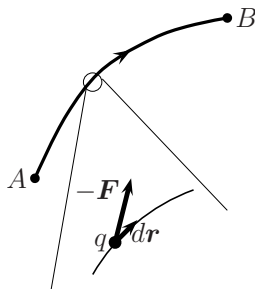
### 電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

### 第 2 章 静電場

## 2.4.1 電場中での仕事



与えられた電場の中で、「微小な電荷」(与えられた電場への影響を無視できる)を点Aから点Bまで運ぶのに必要な仕事を考える。クーロン力  $F$  に「抗して」微小電荷を動かすから、仕事は、

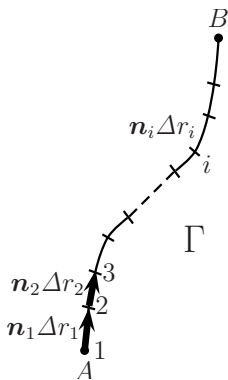
$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1)$$

### 線積分

スカラー関数  $f(x, y, z)$  の曲線  $\Gamma$ (ガンマ) に沿う積分

$$\int_{\Gamma} f \, dr := \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{i \in \Gamma} f_i \Delta r_i \quad (2)$$

$f_i$  は  $\Gamma$  上の点  $i$  での  $f$  の値,  $\Delta r_i$  は点  $i$  と点  $i + 1$  の間の線分の長さを表す.



式 (1) の場合は,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta r_i. \quad (3)$$

ただし,  $\mathbf{n}_i$  は点  $i$  から点  $i+1$  に向かう単位ベクトル. つまり,  $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i$  は点  $i$  での力の運動方向成分. (仕事は, 力の運動方向成分  $\times$  距離.)

注) 線要素  $d\mathbf{r} = \mathbf{n}(r)dr$ .  $\mathbf{n}(r)$  は  $r$  における  $\Gamma$  の単位接ベクトル.

単位電荷当たりの仕事は,

$$w := \frac{W}{q} = - \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{電場の線積分}) \quad (4)$$

## $w$ の経路依存性

一般に線積分はその経路  $\Gamma$  に依存する。  
しかし、静電場の場合、 $w$  は  $\Gamma$  に依存しない。

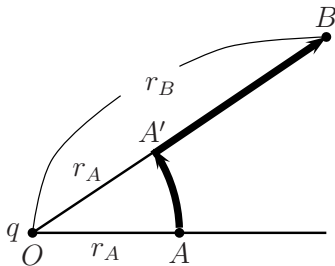
証明のアイデア: まず1つの点電荷について示し、重ね合せの原理を用いて一般化する。

証明: 点電荷  $q$  による電場を考える。原点に電荷  $q$  があるとき、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (5)$$

(i) 右図の A から B への積分を考えると、  
(経路  $A \rightarrow A' \rightarrow B$ )

$$w = - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^{A'} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{A'}^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

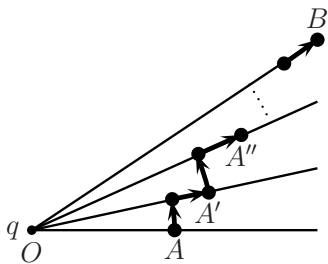


第1項はゼロ. なぜならば,  $A \rightarrow A'$  では電場の向きは常に動径方向 ( $\hat{r}$ ) で, 電荷の運動方向 ( $dr$ ) は円周方向だから,  $E \cdot dr = 0$ .

$A' \rightarrow B$  では,  $dr = \hat{r} dr$  ゆえ

$$w = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (6)$$

(ii) 次に下図の経路  $A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow \dots \rightarrow B$  を考える.



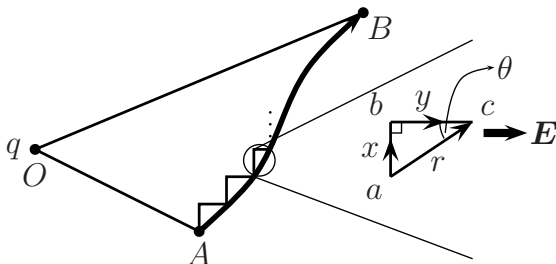
円周方向の積分はすべてゼロだから,

$$\begin{aligned}
 w &= - \int_{r_A}^{r_{A'}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} - \int_{r_{A'}}^{r_{A''}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \cdots - \int^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (7) \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).
 \end{aligned}$$

前と同じ結果。

⇒ ギザギザの経路 (動径方向と円周方向から成る) の場合,  $w$  は経路に依らない。

(iii) 滑らかな経路



三角形  $abc$  はいくらでも小さくできるから， $\mathbf{E}$  は一定と見做せる。  
( $\mathbf{E}$  が  $bc$  方向となるように三角形  $abc$  をとる.)

$$\int_{a \rightarrow b \rightarrow c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{E}|y = |\mathbf{E}|r \cos \theta. \quad (8)$$

$$\int_{a \rightarrow c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{E}|r \cos \theta. \quad (|\mathbf{E}| \cos \theta \text{ は } \mathbf{E} \text{ の } ac \text{ 方向成分.}) \quad (9)$$

よって，滑らかな経路とギザギザの経路は同じ積分結果。  
重ね合せの原理を用いると，一般の静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  について

$$w = - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

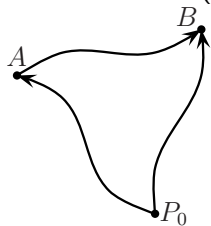
は，積分の経路に依存しない。

## 2.4.2 静電ポテンシャル (電位)

基準点  $P_0$  を決めて、スカラー場  $\phi$  (ファイ) を静電場下での  $P_0 \rightarrow A$  の単位電荷当りの仕事 (点  $A$  の座標を  $\mathbf{r}_A$  とする.)

$$\phi(\mathbf{r}_A) := w(P_0 \rightarrow A) = - \int_{P_0}^A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (10)$$

と定義する. (注: これは経路に依らない.) 点  $B$  では,



$$\phi(\mathbf{r}_B) = - \int_{P_0}^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (11)$$

$A \rightarrow B$  の仕事は,

$$\begin{aligned} w(A \rightarrow B) &= w(A \rightarrow P_0) + w(P_0 \rightarrow B) \\ &= -w(P_0 \rightarrow A) + w(P_0 \rightarrow B) = \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A). \end{aligned} \quad (12)$$



一方,

$$w(A \rightarrow B) = - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (13)$$

よって,

$$- \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A). \quad (14)$$

(始点と終点の  $\phi$  だけで決まる. )

## 静電ポテンシャル (電位)

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (15)$$

## 点電荷の静電ポテンシャル

$P_0$  を無限遠にとれば, 原点に置かれたの電荷  $q$  のポテンシャルは, 式 (6) より,  $r_A \rightarrow \infty$ ,  $r_B = r$  として,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (16)$$

## 複数の点電荷の静電ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (17)$$

すなわち、ポテンシャルについても重ね合せの原理が成り立つ。

∴ 重ね合せの原理 (式 (2. 3. 4)),  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{E}_i$  は  $i$  番目の電荷がつくる電場) より,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (18) \\ &= \sum_i - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \\ &\quad (\phi_i \text{ は } i \text{ 番目の電荷のポテンシャル}) \\ &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \end{aligned}$$

## 連続的な電荷分布の場合

体積密度を  $\rho(\mathbf{r})$  とすると,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad \text{cf. 式 (2. 3. 5)} \quad (19)$$

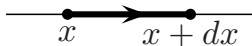
## 静電ポテンシャルの単位

式 (15) より  $(\text{N/C})\text{m}=\text{J/C}$ .

$$1 \text{ J/C} =: 1 \text{ V (ボルト, Volt)} \quad (20)$$

$E$  の単位は,  $\text{V/m}$  と書ける.

## 2.4.3 静電ポテンシャルから電場を求めること



少し離れた2点  $(x, y, z)$  と  $(x + dx, y, z)$  を考える.  $(x, y, z) \rightarrow (x + dx, y, z)$  の単位電荷当りの仕事は,

$$\Delta w = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_x dx. \quad (21)$$

ポテンシャルを用いると,

$$\Delta w = \phi(x + dx, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx. \quad (22)$$

よって,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

$y$  方向,  $z$  方向についても同様にして,

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (23)$$

## ベクトル微分演算子 $\nabla$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{ナブラ})$$

用いると,

## 静電ポテンシャルによる電場の表式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (24)$$

これは式 (15) の微分形.

一般にスカラー場  $f$  について,  $\nabla f$  を  $f$  の gradient(勾配) といい,  $\text{grad } f$  と書く場合もある.  $\nabla f$  はベクトル場になっている.

## 2.4.4 電場の rotation(回転)

### ベクトル場の rotation

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (25)$$

( $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A}$  などとも書く.) 式(24)から,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

$x, y$  成分についても同様. よって,

### 静電場の rotation

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (27)$$

$\phi$  の具体的な形は用いていない. これで, 静電場の法則の一部を微分形に書くことができた. (近接相互作用の考え方)

注) 一般に  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$  ( $f(\mathbf{r})$  はスカラー場) のとき,  
 $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = 0$ .

クーロン場が式 (27) を満すこと直接計算で確かめよう.

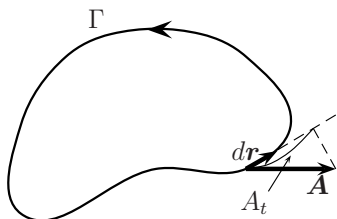
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (28)$$

の回転は,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{y - y_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ (y - y_0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - (x - x_0) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

重ね合せの原理から, 式 (27) が任意の静電場について成立することが確かめられる. 問) 最後の等式を示せ.

## 2.4.5 ストークス (Stokes) の定理



$\Gamma$  を閉曲線 (ループ) とする. ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の  $\Gamma$  への接線成分を,  $\Gamma$  に沿って 1 周積分する. (反時計回りを正の方向とする.)

ベクトル場の循環 (circulation)

$$\oint_{\Gamma} A_t(\mathbf{r}) \, dr = \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (30)$$

( $\oint$  は 1 周積分,  $A_t$  は  $\mathbf{A}$  の接線成分を表す.)

cf. 式 (1)



図のように循環を分割することを考える。  
 $P_1, P_2$  間の積分は,  $\Gamma_1$  では

$$\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

$\Gamma_2$  では

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

で互いに打ち消し合う。よって,

循環の分割

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (31)$$

が成り立つ。

# ストークスの定理

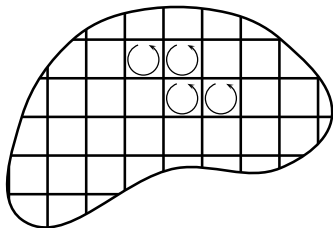
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} \quad (32)$$

(右辺は面積分で、 $S$ は $\Gamma$ を境界とする面。)

証明のアイデア: 左辺の循環を細かく分割して、それぞれについて上の等式が成り立つことを示す。

証明: 図のように $\Gamma$ に沿う循環を $\Gamma$ を境界とする面上の小ループの和に分割する。

$$\oint_{\Gamma} = \sum \oint_{\text{小ループ}} \quad (33)$$

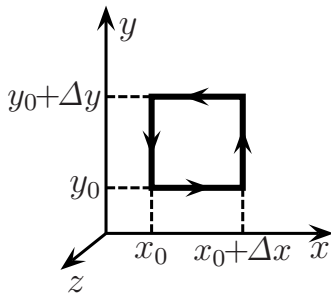


分割を無限に小さくすれば、どの小ループも小さい正方形で近似できる。

## 無限小正方形の周りの循環

(長方形でもよい)

図のように正方形を  $xy$  平面にとる。  
正方形周りの循環は4つの辺に沿う積分  
の和で表わされる。



$$\begin{aligned}\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} A_x(x, y_0, z) dx + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} A_y(x_0 + \Delta x, y, z) dy \\ &+ \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} A_x(x, y_0 + \Delta y, z) dx + \int_{y_0+\Delta y}^{y_0} A_y(x_0, y, z) dy \\ &= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [A_x(x, y_0, z) - A_x(x, y_0 + \Delta y, z)] dx \\ &+ \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} [A_y(x_0 + \Delta x, y, z) - A_y(x_0, y, z)] dy \quad (34)\end{aligned}$$

$$A_x(x, y_0 + \Delta y, z) = A_x(x, y_0, z) + \frac{\partial A_x(x, y_0, z)}{\partial y} \Delta y + O((\Delta y)^2)$$

などを用いると, (注: 右辺第2項の偏微分は,  $\left. \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=y_0}$  の意.)  
被積分関数の  $\Delta x, \Delta y$  の2次以上を無視して,

$$\begin{aligned} &= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left[ -\frac{\partial A_x(x, y_0, z)}{\partial y} \Delta y \right] dx + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left[ \frac{\partial A_y(x_0, y, z)}{\partial x} \Delta x \right] dy \\ &= -\frac{\partial A_x(x_0, y_0, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial A_y(x_0, y_0, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \\ &= \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\nabla \times \mathbf{A})_z \Delta x \Delta y = (\nabla \times \mathbf{A})_z dS \end{aligned}$$

( $\Delta x \Delta y =$  小正方形の面積  $= dS$  を用いた.) 小正方形の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  (単位ベクトル) は  $z$  軸の正の方向 (右手系) ゆえ,

$$= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} dS, \text{ 面要素})$$

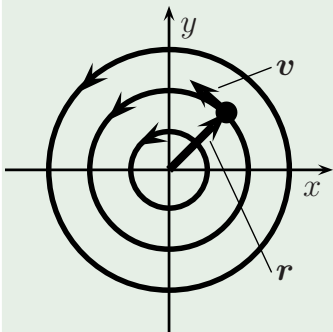
(座標系によらない形に書けた.)

分割の議論，式 (33) から， $S$  を  $\Gamma$  を境界とする面とすると，

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \sum \oint_{\text{小正方形}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\text{すべての小正方形}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{面積分}) \quad (35) \end{aligned}$$

(証明終)

## 例: 角速度 $\omega$ で回転する円板



点  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  での速度は  
 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (-y\omega, x\omega, 0)$  で,  $|\mathbf{v}(\mathbf{r})| = r\omega$ .

$$\oint_{r=a} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi a a\omega = 2\pi a^2\omega. \quad (36)$$

一方,  $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (0, 0, 2\omega)$  より,

$$\int_{r \leq a} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2\omega \pi a^2. \quad (37)$$

確かに, ストークスの定理が成り立っている.

注)  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  の場  $\Rightarrow$  渦なし.  $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$  の場  $\Rightarrow$  渦あり.

## 2.4.6 保存場

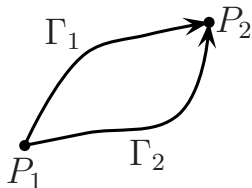
### 線積分の経路依存性と場の回転

任意の2点  $P_1, P_2$  間の曲線に沿う積分がその経路に依存しないようなベクトル場の回転は0.

証明のアイデア: 閉曲線に沿う積分が0であることを示し、ストークスの定理を用いる.

証明: 2点間の線積分が経路によらないから,

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (38)$$



このとき, 任意の閉曲線に沿う積分は0である. なぜなら,  $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$  として,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (39)$$

(逆に,  $\oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$  であれば, 2点間の積分は経路によらない.) このとき, ストークスの定理式(32)より,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (40)$$

$S$  は任意の面だから,

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{至る所で rotation がゼロ.}) \quad (41)$$

(逆に,  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  なら  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .)

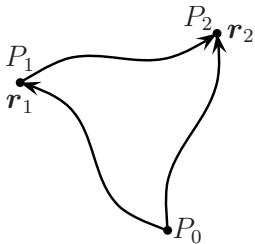
## 回転が0のベクトル場のスカラー場による表示

$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$  のとき, 適当なスカラー場  $f(\mathbf{r})$  を用いて,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$  と書ける.

証明のアイデア: 線積分を用いて  $f(\mathbf{r})$  を構成する.



証明: 2点間の曲線に沿う  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の積分は、その経路に依存しないから、基準点  $P_0$  を決めれば、



$$\begin{aligned} & \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (42)$$



ただし、

$$f(\mathbf{r}) := \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (43)$$

これより、

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (44)$$

$$(d\mathbf{r} = (dx, dy, dz))$$

一方,

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (45)$$

よって,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}). \quad (46)$$

(証明終)

このような場を保存場という. ( $f$ はポテンシャルに相当する.)

逆に,  $\mathbf{A} = \nabla f$  のとき,  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ .

(計算は式(26)と同様. 式(27)の後の注を見よ.)

ここで静電場 (クーロン場) のときの議論を見直してみよう。

式 (5) から式 (9) の議論で,  $w = -\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  が積分経路によらないことを示した. この議論は  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}$  であれば,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の  $r$  依存性にはよらない. 例えば, (ii) の経路では,

$$\begin{aligned} w &= -\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} & (47) \\ &= -\int_{r_A}^{r_{A'}} g(r) dr - \int_{r_{A'}}^{r_{A''}} g(r) dr - \dots = -\int_{r_A}^{r_B} g(r) dr. \end{aligned}$$

$w$  が経路に依らないことから, ポテンシャル  $\phi$  の存在を示し,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  と書けることも示した. また,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  も示した. この結果は, 静電場 (クーロン場) の  $r$  依存性 ( $1/r^2$  則) には無関係であることが分かる.

従って,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  はクーロンの法則 (静電場の法則) の一部であり, ( $1/r^2$  則を決定するような) さらなる (微分形の) 方程式があるはず. ( $\implies$  §2.5)

## 2.4.7 等電位面と電気力線

gradient の意味

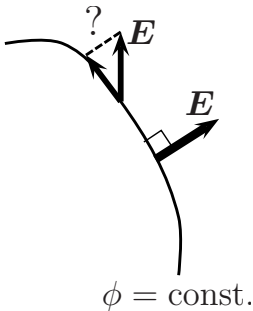
$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (48)$$

$(\nabla f)_x = \partial f / \partial x$  は、 $f$  の  $x$  方向への変化の速さ。同様に、 $\nabla f$  のある方向の成分は、その方向への変化率。(cf. 式 (45)) 従って、 $\nabla f$  の方向は  $f$  が一番速く変化する方向である。

### 等電位面 (等ポテンシャル面)

$$\phi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (49)$$

となるような面を等電位面 (あるいは等ポテンシャル面) という。電場は等電位面に垂直である。



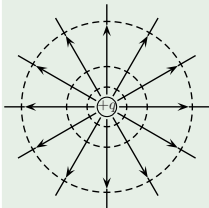
$$E = -\nabla\phi \quad (50)$$

であった。もし電場が等電位面に垂直でないならば、 $E$ の等電位面に沿う方向の成分があることになり、ポテンシャルが面上で変化することになる。これは定義に反する。

注)  $E$ は $\phi$ が最も速く減少する方向を向いている。

また、電場は各点で電気力線に接していたから、**電気力線と等電位面は垂直**。

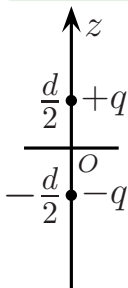
## 例: 1つの点電荷



等電位面は球面になる。

## 例題 1: 電気双極子

電気双極子の静電ポテンシャルを求め、それを用いて電場も求めよ。(cf. 2.3.4 の例 1)



式 (17) より,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right] \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( r^2 - zd + \frac{d^2}{4} \right)^{-1/2} - \left( r^2 + zd + \frac{d^2}{4} \right)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[ \left( 1 - \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} - \left( 1 + \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \right] \end{aligned}$$

遠方 ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg d$ ) では,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{zd}{2r^2} - \left( 1 - \frac{zd}{2r^2} \right) + O((d/r)^2) \right] \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{zd}{r^3}.\end{aligned}\quad (53)$$

$qd$  を一定にしたまま,  $d \rightarrow 0$  の極限を考える.

電気双極子モーメントベクトル  $\mathbf{p} = (0, 0, qd)$  を用いると,

## 電気双極子ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.\quad (54)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  から, ( $\partial r^{-n}/\partial x = -nx/r^{n+2}$  などを用いて)

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p_x}{r^3} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{3x}{r^5} \right], \\
 E_y &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p_y}{r^3} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{3y}{r^5} \right], \\
 E_z &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^3} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{3z}{r^5} \right].
 \end{aligned} \tag{55}$$

まとめると、原点にある電気双極子  $\mathbf{p}$  がつくる電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \tag{56}$$

$\mathbf{p} = (0, 0, qd)$  のときに書き下すと、( $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = qdz$ )

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qdzx}{r^5} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, & E_y &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \\
 E_z &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right).
 \end{aligned} \tag{57}$$



$z$  軸上 ( $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ ) では,

$$\boxed{\phantom{\int_0^z \frac{1}{r^2} dz}}$$

(58)

式 (2. 3. 17) と一致.  $xy$  平面上 ( $z = 0$ ) では,

$$\boxed{\phantom{\int_0^z \frac{1}{r^2} dz}}$$

(59)

( $xy$  平面は等ポテンシャル面. )

補足:  $f(x)$  の不定積分 (原始関数) を  $F(x)$  とすると ( $F'(x) = f(x)$ ),

$$I := \int_a^{a+\Delta a} f(x) dx = F(a + \Delta a) - F(a), \quad (60)$$

$$= F(a) + F'(a)\Delta a + O((\Delta a)^2) - F(a), \quad (61)$$

$$= F'(a)\Delta a + O((\Delta a)^2) = f(a)\Delta a + O((\Delta a)^2). \quad (62)$$