

2.3 電場 (electric field)

電磁気学詳論 I (2023)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 2 章 静電場

2.3.1 クーロンの法則と電場

クーロンの法則，式(2.1.2)を

$$\mathbf{F}_{12} = q_1 \mathbf{E}_{12}, \quad \mathbf{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (1)$$

と書く． (\mathbf{E}_{12} = 電荷 q_2 が \mathbf{r}_1 につくる「電場」)

クーロン力についての重ね合せの原理 (式(2.2.4)) より，

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n q \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

と比較して，

点電荷が作る電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (4)$$

$E(\mathbf{r})$ は点 \mathbf{r} における電場を表し、上の式は、電場についての重ね合せの原理を表している。

式 (2. 2. 7) に対応する式は、

電荷分布が作る電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (5)$$

式 (3) より、 E の単位は、N/C.

2.3.2 場とは何か.

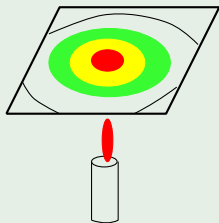
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

- 点 \mathbf{r} に置かれた電荷 q に働く力は、その点 (\mathbf{r}) での電場によって決定される. \implies 近接相互作用
(しかし、電場自身はまだ遠隔相互作用的な考え方で記述されている. 式 (4))
- 一方、式 (2.1.2) では、離れた位置にある電荷から力を受けると考えている. \implies 遠隔相互作用
- 静電場ではどちらも同じ.
- 動的な場合 (時間的な変化がある場合) は、近接相互作用で考える方が電磁場の法則は簡単になる. この場合、電場は空間座標 (\mathbf{r}) と時間 (t) のベクトル関数となる. (磁場も同様.)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

(当面は静電場を扱うので、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$.)

場の例: 温度の場



熱した鉄板の温度 $T(x, y, t)$.

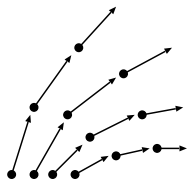
各時刻に鉄板上の各点で「温度」という物理量が決まっている. 鉄板は2次元面だから, この場は2次元面 (+1次元の時間) 上の場. 図の様に「等温線」を描けば, 場のイメージが掴みやすい.

大気の温度を考えると,

$$T = T(x, y, z, t), \quad (3+1) \text{次元時空中の場.} \quad (8)$$

今度は「等温面」を考えればよい.

2.3.3 電場と電気力線



各時刻 t に 3次元空間の各点 r で「電場」という物理量が決まっている。(注: 温度の場合と異なり, 電場はベクトル.) これを数学的なベクトル関数と考える.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (9)$$

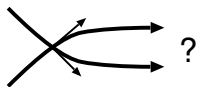
電気力線



空間の各点の電場のベクトルを接ベクトルに持つような線.

ベクトルの向きに電気力線も向くとする.

電気力線は交わらない

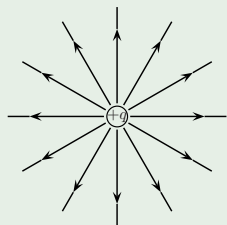


空間の各点で電場のベクトルは一意的に決まっているはず. (左図は間違い.)

電気力線による電場の大きさの表現

各点でベクトルの大きさ (電場の強さ) は, 電気力線の面密度に比例するとする.

例: 点電荷1つの場合



原点に置き, $q > 0$ とする. 電場は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (10)$$

電気力線の面密度 n は電場の大きさに比例するとしたので, 半径 r の球面上では,

$$n \propto \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}. \quad (11)$$

電気力線の全本数 N は,

$$N = 4\pi r^2 n \propto \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (r \text{ に依らない. 電荷に比例. }) \quad (12)$$

比例定数を 1 にとることにすれば,

$$N = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (13)$$

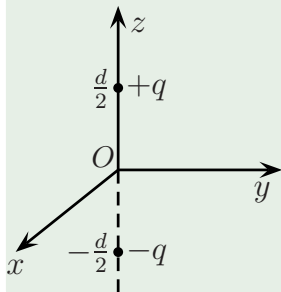
すなわち, 電荷 q からは q/ϵ_0 本の電気力線が出る.
($q < 0$ の場合は, $-q/\epsilon_0$ 本入る.)

2.3.4 電荷分布が与えられている場合の電場

点電荷の場合 (式 (4))

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (14)$$

例 1: 電気双極子



電荷 1: $+q$, $\mathbf{r}_1 = (0, 0, d/2)$,

電荷 2: $-q$, $\mathbf{r}_2 = (0, 0, -d/2)$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right] \quad (15)$$

r として, z 軸上の点 $P(0, 0, z)$ を考える. 対称性から電場は z 成分のみ持つ.

$$E_z(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - d/2}{|z - d/2|^3} - \frac{z + d/2}{|z + d/2|^3} \right]. \quad (16)$$

十分遠方を考えることにして, $|z| \gg d$ とすると,

$$\begin{aligned} E_z(z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|^3} \left[\frac{1 - d/(2z)}{|1 - d/(2z)|^3} - \frac{1 + d/(2z)}{|1 + d/(2z)|^3} \right] \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|^3} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)\left(1 + 3\frac{d}{2z}\right) - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)\left(1 - 3\frac{d}{2z}\right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|^3} \frac{2d}{z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|z|^3}. \end{aligned} \quad (17)$$

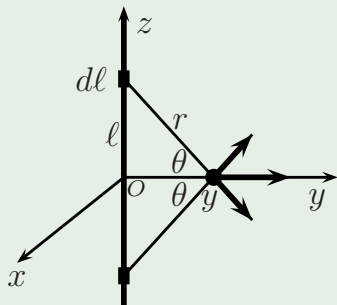
(注: $(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2)$.)

十分遠方では, $1/|z|^3$ のように振舞う.

連続分布の場合 (式 (5))

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (18)$$

例 2: 無限に長い一様に帯電した細い棒



棒を z 軸にとる. 単位長さ当たりの電荷 (線密度) を λ とすると, 微小な長さ dl の棒が持つ電荷は λdl . z 軸方向の並進対称性から, z 依存性はなく, 電場の z 成分もない. また, z 軸の周りの回転対称性から, $y-z$ 平面でのみ考えればよい.

このとき、電場は y 成分のみ。 $d\ell$ からの E_y への寄与は、

$$\begin{aligned} dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \lambda d\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{(y/\cos\theta)^2} \lambda d\ell \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^3\theta}{y^2} d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{y} d\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

($r \cos\theta = y$, $\ell/y = \tan\theta$, $d\ell = \boxed{}$ $d\theta$ を用いた。)
棒全体の寄与を加えて(積分して),

$$E_y(y) = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}. \quad (20)$$

棒からの距離に反比例.