

5.2 電磁波

電磁気学詳論 I (2022)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第5章 マクスウェル方程式と電磁波

5.2.1 自由空間でのマクスウェル方程式の解

$\rho = 0$, $\mathbf{i} = 0$ とする. (自由空間)

x , y によらず z のみの関数であるような解を考えよう. つまり,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(z, t).$$

式 (5. 1. 20) から, ($\rho = 0$ として)

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

式 (5. 1. 21) から,

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

式 (5. 1. 22) から,

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (3)$$

式 (5. 1. 23) から ($i = 0$ として), $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/v^2$ とおくと,

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad 0 = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (4)$$

式 (1) と式 (4) の第 3 式から, E_z は定数. 静電場はないとして, $E_z = 0$ と置く. 同様に静磁場もないとして, 式 (2) と式 (3) の第 3 式から, $B_z = 0$.

E_x と E_y は一般にゼロでないが, 特に $E_y = 0$ となる解を考えよう. このとき, 式 (3) の第 1 式, 式 (4) の第 2 式より,

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

つまり, $B_x = 0$ と置ける. これと, 式 (3) の第 1 式, 式 (4) の第 2 式から,

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \quad (E_y = 0 \text{ と無矛盾})$$

ここまでの結果をまとめると、

$$\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, B_y(z, t), 0).$$

残っている方程式は式 (3) の第 2 式と式 (4) の第 1 式.

$\frac{\partial}{\partial z}[(3) \text{ の第 2 式}] + \frac{\partial}{\partial t}[(4) \text{ の第 1 式}]$ から、

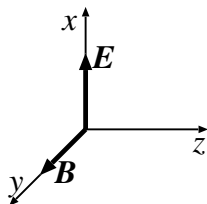
(1次元) 波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = 0. \quad (6)$$

$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t}[(3) \text{ の第 2 式}] + \frac{\partial}{\partial z}[(3) \text{ の第 2 式}]$ から、

(1次元) 波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} B_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_y = 0. \quad (7)$$



波動方程式 (6) の一般解

$$E_x(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt), \quad f, g \text{ は任意関数.} \quad (8)$$

∴

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f'' + g'', \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (-v)^2 f'' + (+v)^2 g'' = v^2(f'' + g'').$$

このとき、式 (3) の第 2 式と式 (4) の第 1 式より、

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -f' - g', \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v}(f' - g'). \quad (9)$$

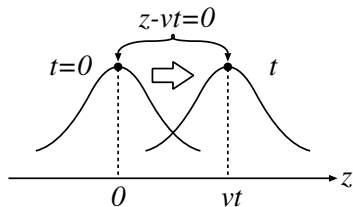
これを積分して、

$$B_y(z, t) = \frac{1}{v}[f(z - vt) - g(z + vt)] + \text{定数.} \quad (10)$$

(これが式 (7) をみたしていることも明らか。定数は以下では 0 とする。)

この解の意味

$$f(z - vt)$$



速さ v で z 軸の正の方向に進む波

同様に, $g(z + vt)$ は速さ v で z 軸の負の方向に進む波を表わす.

時刻 t で $z \pm vt$ が一定の面 (波面) は z 軸に垂直な平面. \Rightarrow 平面波

$\rho = 0$, $\mathbf{i} = 0$ でも真空中を電磁場は伝わって行く. \Rightarrow 電磁波

5.2.2 電磁波の性質

式 (2. 1. 3) と式 (3. 3. 2) から,

電磁波の速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (\text{真空中の) 光速.} \quad (11)$$

⇒ 光は電磁波.

電磁場は横波

式 (8), (10) の f の解は z 軸の正の方向に進み, E は x 軸方向, B は y 軸方向. g の解は z 軸の負の方向に進み, E は x 軸方向, B は y 軸の負の方向. ($f, g > 0$ として.) すなわち, E, B は電磁波の進行方向に垂直.

E と B も互いに垂直. 一般に, $E \times B \propto$ 進行方向 となる.

5.2.3 調和振動解

(3次元) 波動方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (12)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (13)$$

$\therefore \frac{\partial}{\partial t}$ (5. 1. 23) に (5. 1. 22) を代入すると, ($i = 0$ として)

$$\nabla \times (-\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (14)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (15)$$

と (5. 1. 20) ($\rho = 0$) を用いれば式 (12) を得る. 同様に,
 $\frac{\partial}{\partial t}$ (5. 1. 22) と (5. 1. 23) から, 式 (13) を得る.

調和振動解 (単色波)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (16)$$

$\omega (> 0)$ は定数, \mathbf{E}_0 , \mathbf{k} は定数ベクトルで, $\omega = ck$ ($k := |\mathbf{k}|$).

∴ 式(12) に式(16) を代入すると,

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}. \quad (17)$$

ω は角振動数で, $\hat{\mathbf{E}}_0$ は電場の向きを表し, \mathbf{k} は波数ベクトルと呼ばれる. 式(16) は \mathbf{k} の方向に進む波を表している.

式(5. 1. 20) から, ($\rho = 0$)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \text{電場は } \mathbf{k} \text{ (進行方向) に垂直. (横波)} \quad (18)$$

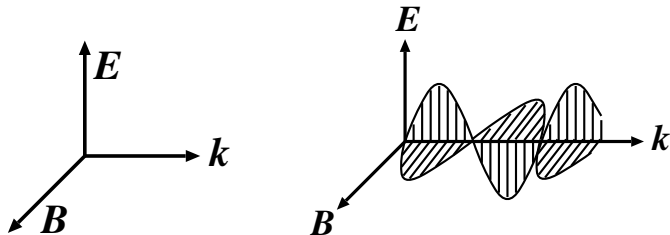
式(5. 1. 22) に式(16) を代入して,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (19)$$

これを積分して,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \text{ 磁場は } \mathbf{E}, \mathbf{k} \text{ と垂直. (横波)} \quad (20)$$

を得る. (これが式(13)の解であることも明らか.)



また, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ を用いて,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega} [\mathbf{E}^2 \mathbf{k} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}] = \frac{\mathbf{E}^2}{\omega} \mathbf{k}. \quad (21)$$