

3.3 定常電流の磁場とベクトルポテンシャル

電磁気学詳論 I (2021)

田中担当クラス

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html>

第 3 章 定常電流と静磁場

3.3.1 ビオ-サバル (Biot-Savart) の法則

ビオ-サバル (Biot-Savart) の法則

定常電流密度 i が作る磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad \mu_0 = \text{真空の透磁率} \quad (1)$$

cf. クーロンの法則, 式 (2. 3. 5)

SI改定前は, A(アンペア)の定義で, $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ と定義されていた. (H:=Wb/A, ヘンリー.) 改定後は, 素電荷 e によって C(クーロン)が定義されることになったので, μ_0 は測定値となる. ϵ_0 と同様に (§§2. 1. 3 参照), 微細構造定数 α を用いて,

真空の透磁率 μ_0

$$\mu_0 = \frac{2h\alpha}{ce^2} = 1.256 \cdots \times 10^{-6} \text{ H/m} (\simeq 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}) \quad (2)$$

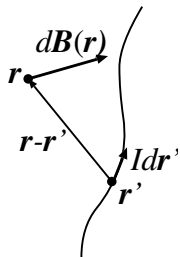
実用上は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ と近似して問題ない。
(実は, $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. 第5章参照.)

細い一様な導線 (回路 C) を流れる電流の場合

断面の積分を実行して (式 (3.1.21)),

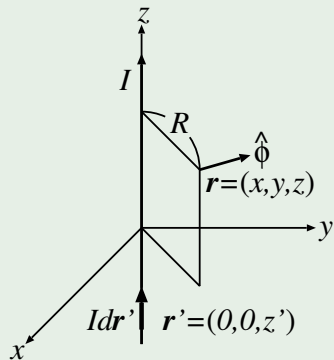
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3)$$

電流素片のつくる磁場



$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4)$$

例 1: 直線電流のつくる磁場



電流を z 軸にとると,

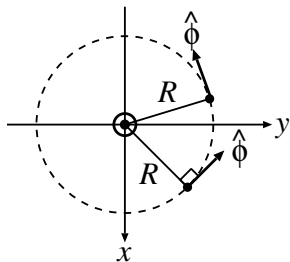
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}. \quad (5)$$

電流からの距離に反比例. 電流の方向について右ねじをまわす方向.

$d\mathbf{r}' = \hat{z} dz'$ ($\hat{z} = (0, 0, 1)$, z 軸方向の単位ベクトル) と書けるから,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \hat{z} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6)$$

$$\hat{z} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (0, 0, 1) \times (x, y, z - z') = (-y, x, 0) = R\hat{\phi}. \quad (7)$$

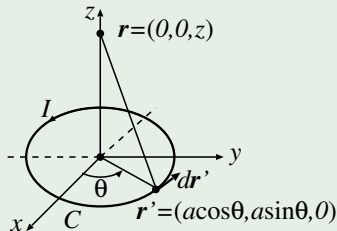


ただし、 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\hat{\phi}$ は方位角方向 (z 軸のまわりを回る方向) の単位ベクトル。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\sqrt{R^2 + (z - z')^2})^3} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\sqrt{R^2 + z'^2})^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

問：最後の等号を示せ。(ヒント： $z' = R \tan \theta$ と変数変換.)

例 2: 円電流が中心軸上につくる磁場



半径 a , 中心軸を z 軸にとると,

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (9)$$

$$d\mathbf{r}' = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0) d\theta \quad (10)$$

より,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= ad\theta(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (-a \cos \theta, -a \sin \theta, z) \\ &= ad\theta(z \cos \theta, z \sin \theta, a). \end{aligned} \quad (11)$$

また,

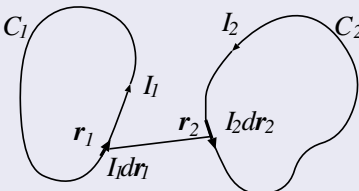
$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}. \quad (12)$$

よって,

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int d\theta (z \cos \theta, z \sin \theta, a) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \tag{13}$$

3.3.2 定常電流間に働く力

アンペール (Ampère) の力


$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (14)$$

電流 I_1 が電流 I_2 の場所につくる磁場は、式 (3) より、

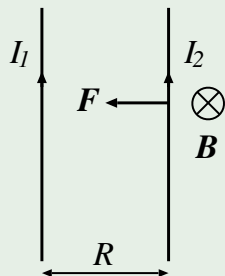
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (15)$$

この磁場が電流 I_2 に及ぼす力は、式 (3. 2. 14) より、

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2). \quad (16)$$

これを C_2 に沿って積分して、式 (14) を得る。

例 1: 平行直線電流間に働く力



単位長さ当りの力は,

$$F_{\text{単位}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}. \quad (17)$$

力の向きは, 電流に垂直で, 電流が同じ (異なる) 方向のときは引力 (斥力).

式 (5) より, I_1 が I_2 の所にする磁場は,

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \quad (18)$$

I_2 が受ける力は, 式 (16) より, (力の大きさだけ考えると)

$$dF = I_2 dr_2 B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dr_2. \quad (19)$$

(I_2 と B は直交.) これより, 式 (17) を得る.

3.3.3 ベクトルポテンシャル

$$\nabla_r \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (20)$$

(∇_r は \mathbf{r} についての微分を表わす) を式 (1) と比較して,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \nabla_r \left(\frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (21)$$

ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (22)$$

を用いると,

磁束密度とベクトルポテンシャルの関係

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (23)$$

cf. $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

式 (3) に対応する式は,

ベクトルポテンシャル (導線を通る電流の場合)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (24)$$

式 (23) より,

B の発散

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (25)$$

(\mathbf{A} の形に依らない.) 式 (2. 5. 45) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ と較べると, “磁荷” が無いことを表わしている.

ベクトルポテンシャルの不定性

$\chi(\mathbf{r})$ を任意のスカラー場とすると, \mathbf{A} と

$$\mathbf{A}' := \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (26)$$

は同じ \mathbf{B} を与える.

\therefore 2つのベクトルポテンシャル \mathbf{A} と \mathbf{A}' が同じ \mathbf{B} を与えるとする.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'. \quad (27)$$

これより,

$$\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0. \quad (28)$$

§§2. 4. 6 で示したように, 回転がゼロのベクトル場は, スカラー場の勾配で書ける. つまり, スカラー場 $\chi(\mathbf{r})$ を用いて,

$$\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla\chi. \quad (29)$$

また、直接計算で確かめることもできる。

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \chi = \mathbf{B}. \quad (30)$$

問：最後の等号を示せ。

この自由度を使って、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ とすることができる。後で見るように、式(22)の \mathbf{A} はこれを満たす。

例 1: 一様な磁場 \mathbf{B} を与えるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (31)$$

(もちろん、これは一意的ではない。)

$$A_x = \frac{1}{2}(B_y z - B_z y), \quad A_y = \frac{1}{2}(B_z x - B_x z), \quad A_z = \frac{1}{2}(B_x y - B_y x) \quad (32)$$

より、

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{1}{2}(B_x + B_x) = B_x, \\
 (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{1}{2}(B_y + B_y) = B_y, \\
 (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{2}(B_z + B_z) = B_z.
 \end{aligned} \tag{33}$$

すなわち、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

小さいループ電流の作る磁場

ループ電流の磁気双極子モーメントを m とすると、ループの大きさに較べて遠方では、

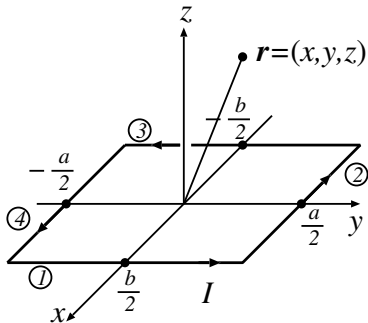
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} \tag{34}$$

証明のアイデア: 遠方から見ればループの形は関係ないから、簡単なループで式(24)を用いて計算する.

証明: 図のような xy 平面上の長方形ループ電流 I を考える.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (35)$$

辺 1 の積分は, $d\mathbf{r}' = \hat{y}dy'$,
 $\mathbf{r}' = (b/2, y', 0)$, とすると,



$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(x - b/2)^2 + (y - y')^2 + z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - xb - 2yy' + b^2/4 + y'^2}}. \end{aligned}$$

$r \gg a, b$ として, $(-a/2 < y' < a/2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r \sqrt{1 - xb/r^2 - 2yy'/r^2 + b^2/(4r^2) + y'^2/r^2}} \\ &\simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xb}{2r^2} + \frac{yy'}{r^2} \right). \end{aligned}$$

$$\int_1 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq \hat{\mathbf{y}} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xb}{2r^2} + \frac{yy'}{r^2} \right) dy' = \hat{\mathbf{y}} \frac{a}{r} \left(1 + \frac{xb}{2r^2} \right).$$

辺3の積分は、 $b \rightarrow -b$, $d\mathbf{r}' = -\hat{\mathbf{y}} dy'$ とすればよい。

$$\int_3 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq -\hat{\mathbf{y}} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{xb}{2r^2} \right).$$

辺4の積分は、 $d\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{x}} dx'$, $\mathbf{r}' = (x', -a/2, 0)$ として、

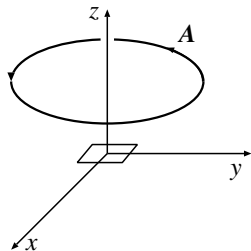
$$\int_4 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \hat{\mathbf{x}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y + a/2)^2 + z^2}} \simeq \hat{\mathbf{x}} \frac{b}{r} \left(1 - \frac{ya}{2r^2} \right).$$

辺2は,

$$\int_2 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq -\hat{\mathbf{x}} \frac{b}{r} \left(1 + \frac{ya}{2r^2}\right).$$

まとめると,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(-\hat{\mathbf{x}} \frac{b}{r} \frac{ya}{r^2} + \hat{\mathbf{y}} \frac{a}{r} \frac{xb}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ab}{r^3} (-\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ab}{r^3} (-y, x, 0). \end{aligned} \quad (36)$$



磁気双極子モーメント $\mathbf{m} = Iab\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, Iab)$ (ab は回路の面積, $\hat{\mathbf{z}}$ は回路の法線ベクトル) を用いると,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (37)$$

と書ける. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ から, (宿題3の式(1)も用いて)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right].
 \end{aligned} \tag{38}$$

$\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$, $\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{m}$ を用いると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{3\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \right].$$

さらに, 公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \boxed{\text{問: この公式を示せ.}} \tag{39}$$

を用いると, $\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \mathbf{m}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})$ で,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-3\mathbf{m}r^2 + 3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) + 2\mathbf{m}r^2}{r^5} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}
 \end{aligned} \tag{40}$$

(証明終)

cf. (2. 4. 56), 電気双極子の作る電場

平面回路について電流 I ，面積 S ，法線ベクトル n とすると，

$$m = ISn \quad (41)$$

となり，遠方でのベクトルポテンシャル，磁場は式 (34) で表わされる．

3.3.4 アンペール (Ampère) の法則

微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}) \quad (42)$$

証明のアイデア: 式 (22) で与えられる \mathbf{B} の回転を考える.

証明:
$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad (43)$$

問: 最後の等号を示せ. 第1項の寄与は,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \cdot \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (44)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_r \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

($\nabla_r \rightarrow \nabla_{r'}$ として)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{r'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

(部分積分をして)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')) \left(\frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'$$

(定常電流ゆえ $\nabla \cdot \mathbf{i} = 0$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

(ガウスの定理を用いて)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(電流分布は遠方でゼロ)

$$= 0.$$

よって,

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{A}. \quad (45)$$

一方，静電場のときの議論から，式 (2. 4. 19)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

が，式 (2. 7. 4)

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

の解であることを知っている．これから，式 (22)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

が，ベクトルポテンシャルに対するポアソン方程式

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r}) \quad (46)$$

を満すことが分かる．よって，式 (42) を得る．(証明終)

積分形のアンペールの法則

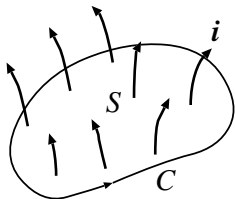
$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad (47)$$

証明のアイデア: 式 (42) を面積分して、ストークスの定理を用いる.

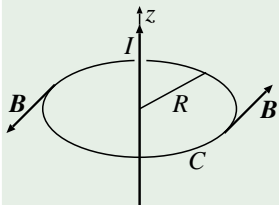
証明: 閉曲線 C に囲まれた面 S を考える.
式 (42) をこの面で積分すると,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}. \quad (48)$$

$\int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$ は S を通る電流 I であるから、ストークスの定理より、式 (47) を得る. (証明終)



例 1: 定常直線電流の作る磁場 (cf. §§3. 3. 1 例 1)



電流を z 軸にとると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}. \quad (49)$$

B は z 軸まわりの円周方向を向き, 対称性からその大きさは電流からの距離 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ にのみよる. すなわち,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(R) \hat{\phi}. \quad (50)$$

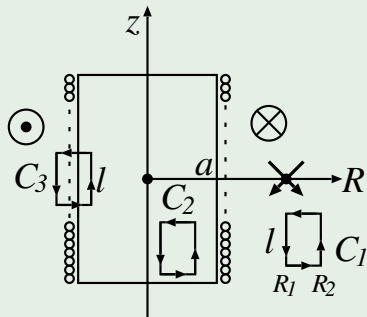
z 軸のまわりの半径 R の円に式 (47) を適用すると,

$$2\pi R B(R) = \mu_0 I. \quad (51)$$

つまり,

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (52)$$

例 2: 無限に長いソレノイド



ソレノイドの軸を z 軸, 半径 a , 電流 I , 単位長さ当たりの巻数を n とする.

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z}, & R < a \\ 0, & R > a \end{cases} \quad (53)$$

円周方向の磁場は無い. 動径方向の磁場は $\pm z$ の寄与が打ち消し合う. 結局, z 成分のみがあり, 対称性から,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_z(R) \hat{z} \quad (54)$$

と書ける. 閉曲線 C_1 に式 (47) を用いて,

$$\int_{C_1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \ell B_z(R_2) - \ell B_z(R_1) = 0. \quad (55)$$

よって,

$$B_z(R_1) = B_z(R_2) \quad \text{ソレノイド外部では } B_z \text{ は一定.} \quad (56)$$

式 (47) を閉曲線 C_2 に適用すると, ソレノイド内部でも B_z は一定.

ソレノイド内部から出た磁束 (ある面 S を貫く B を S で積分したもの) は, 必ず外部を通過して内部にもどらなければならないから,

$$B_z(\text{内部}) \cdot \text{内部の面積} = B_z(\text{外部}) \cdot \text{外部の面積.} \quad (57)$$

内部の面積は πa^2 , 外部の面積は無限大. 従って,

$$B_z(\text{外部}) = 0. \quad (58)$$

C_3 について考えると,

$$\ell B_z(\text{内部}) = \mu_0 n \ell I. \quad (59)$$

まとめ: 静磁場の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (60)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}). \quad (61)$$

式 (60) は, \mathbf{B} が時間に依存するときも正しい. (説明は第 5 章で.)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

ベクトルポテンシャルを用いると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (62)$$