

# 第5章 マクスウェル方程式と電磁波

# 5.1 マクスウェル (Maxwell) 方程式

## 5.1.1 電場と磁場の双対性 (duality)

- これまでに分かった電磁場の基本方程式

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{ファラデーの法則})$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}). \quad (\text{アンペールの法則})$$

- 式 (1) は動的な場合も成り立つ。 (理由は以下で。 )

$$(5) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}.$$

- 式 (2) も同様.

(6) 
$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

- 式 (6) は磁場に対するガウスの法則. “磁荷” が存在しないだけ.
- 式 (3) は, 変化する磁場から電場ができることを表わしている.
- 式 (4) も式 (5), (6) のように動的な場に拡張してみよう.

(7) 
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{誤})$$

- 電場と磁場の対応関係 (双対性) を考慮して, 式 (3) と (7) を比較してみると, (3) の右辺に (7) の電流に相当する “磁流” がないのは, (6) で “磁荷” がいないためと考えられる. (7) の右辺には, (3) の右辺のように,  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  のような項があると推測される. (変動する電場も磁場を作るだろう. )

## 5.1.2 変位電流

式 (7) の発散を考えてみる.

$$(8) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t).$$

左辺 = 0. これは電荷保存則 (§§3. 1. 2)

$$(9) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0$$

と矛盾する. 式 (5) を用いると,

$$(10) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

すなわち,

$$(11) \quad \nabla \cdot \left[ \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] = 0.$$

⇒ 式 (7) で  $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i} + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  とすればよい。

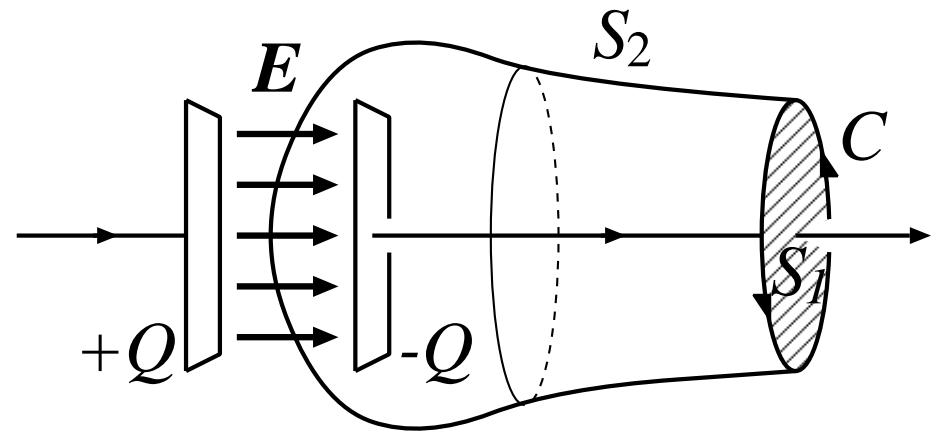
$$(12) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[ \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (\text{正})$$

アンペール・マクスウェルの法則

$$(13) \quad \mathbf{i}_d(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \underline{\text{変位電流密度}}$$

● 例 1: コンデンサーと変位電流

平行板コンデンサーに電流  $I(t)$  が流れている。閉曲線  $C$  とそれに囲まれた面  $S_1$  を考えると、



$$(14) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

( $S_1$  には電場はないから、変位電流の寄与はない.)  
面  $S_2$  を考えると、そこには (伝導) 電流はないから、

$$(15) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

(変位電流の寄与のみ.) 極板の電荷を  $\pm Q(t)$ , 面積を  $S$  とすると,  
(式 (2.8.2))

$$(16) \quad E(t) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 S}.$$

$$(17) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I}{\epsilon_0 S} \int_S dS = \mu_0 I.$$

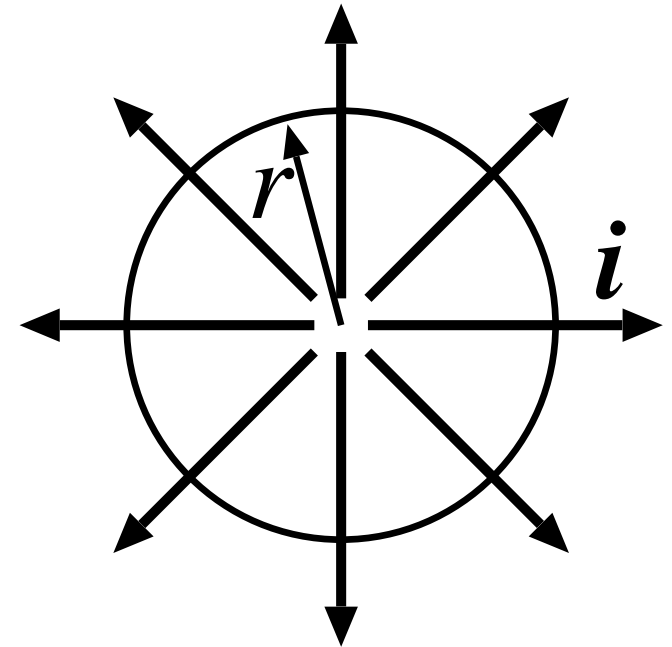
(積分は  $\mathbf{E}$  のあるところだけ、すなわち極板間のみ.)

もし変位電流を考えないとこれはゼロになり，式(14)と矛盾．

- 例 2: 球対称で放射状の電流  
半径  $r$  の球面  $S$  を考える．この内部の電荷を  $Q(r, t)$  とすると，

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} Q(r, t) = -4\pi r^2 i(r).$$

$S$  上の閉曲線  $C$  を考える． $S_C$  を  $C$  に囲まれた面として，



$$\begin{aligned} (19) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 \int_{S_C} \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \int_{S_C} \left[ i(r) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) \right] dS \\ &= \mu_0 \int_{S_C} \left[ i(r) + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] dS = 0 \end{aligned}$$

磁場 (の循環) はできない。



### 5.1.3 マクスウェル方程式

- 電磁気学の基本方程式をまとめると,

$$(20) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0},$$

$$(21) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$(22) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$(23) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

これらをまとめてマクスウェルの方程式という。これとローレンツ力

$$(24) \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が電磁気学の基本法則となる。

- マクスウェルの方程式に解はあるか？

$$\left( \begin{array}{ll} \text{未知関数} & \mathbf{E}, \mathbf{B} \quad 6 \text{ 個} \\ \text{方程式の数} & \quad \quad 8 \text{ 個} \end{array} \right.$$

- 式 (23) の発散を考えると,

$$(25) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

左辺 = 0. また, 電荷保存則から  $\nabla \cdot \mathbf{i} = -\partial \rho / \partial t$ . よって,

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0.$$

従って,  $t = t_0$  で  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) = \rho(\mathbf{r}, t_0) / \varepsilon_0$  が成り立てば, 任意の時刻  $t$  で式 (20) が成り立つ. すなわち, 式 (20) は初期条件として要求するだけでよい. (これが式 (1)  $\Rightarrow$  式 (5) の理由. )

- 同様に式 (22) の発散を考えると,

$$(27) \quad 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}.$$

$t = t_0$  で  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) = 0$  なら, 任意の  $t$  で  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ .

- 式 (20) と式 (21) が初期条件として成り立っていれば, 式 (22) と式 (23) で決定される  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  の時間発展で式 (20), 式 (21) が成り立たなくなるようなことはない.
- つまり, 式 (20), 式 (21) は補助的な方程式で,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  (6つの未知関数) の時間発展は式 (22), 式 (23) (6つの方程式) で記述される.

## 5.1.4 準定常電流

- インダクタンスの議論 (§4.2) で、定常電流の場合の式を (4.2.9) のように時間的に変動する電流に拡張した。電流が導体中を流れるとき、オームの法則

$$(28) \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$$

より、 $\mathbf{i}$  が時間変化する場合には  $\mathbf{E}$  も時間的に変化する。  
⇒ 変位電流  $\mathbf{i}_d$  が生じる。

- §4.2 ではこれを無視していたが、 $|\mathbf{i}_d| \ll |\mathbf{i}|$  であればよい。

- ここで、電場が振動していて、

$$(29) \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\mathbf{E}_0 = \text{定数ベクトル})$$

と表わされるとしよう。式 (28) より、

$$(30) \quad \mathbf{i}(t) = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t .$$

変位電流は,

$$(31) \quad i_d(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}_0 \cos \omega t .$$

$i(t)$  と  $i_d(t)$  の振幅を比較して,

$$(32) \quad \varepsilon_0 \omega \ll \sigma$$

であれば, 変位電流を無視してよい.  
このような電流を準定常電流と呼ぶ.

○ 電気伝導率  $\sigma$  は (20°C で),

	鉄	銅	アルミニウム
$\sigma (\Omega^{-1}\text{m}^{-1})$	$1.0 \times 10^7$	$5.8 \times 10^7$	$3.6 \times 10^7$

$\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  として, 式 (32) より,

$$(33) \quad \omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim \frac{10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}}{10^{-11} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}} = 10^{18} \text{s}^{-1}.$$

(紫外線の振動数に相当.)

○ 家庭用の交流は 60 Hz(50 Hz).

$$(34) \quad \omega \sim 2\pi \times 60 \text{s}^{-1} \sim 10^2 \text{s}^{-1} \ll 10^{18} \text{s}^{-1}.$$

⇒ 変位電流を無視してよい.