3.3 定常電流のつくる磁場とベクトルポテンシャル

3.3.1 ビオ–サバール (Biot–Savart) の法則

- 定常電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ のつくる磁場は,

(1) $$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,dV' \quad \text{ビオ–サバールの法則}}$$

(2) $$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \ : \quad \text{真空の透磁率}\,.$$

cf. クーロンの法則, 式 (2. 3. 5).

($\mu_0\varepsilon_0 = \mu_0/(4\pi) \times 4\pi\varepsilon_0 = 10^{-7}/(10^{-7}c^2) = 1/c^2$)

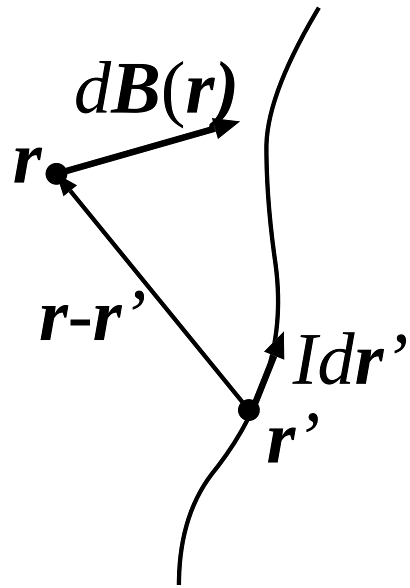
● 細い一様な導線 (回路: C) を流れる電流の場合.

断面の積分を実行して (式 (3. 1. 20)),

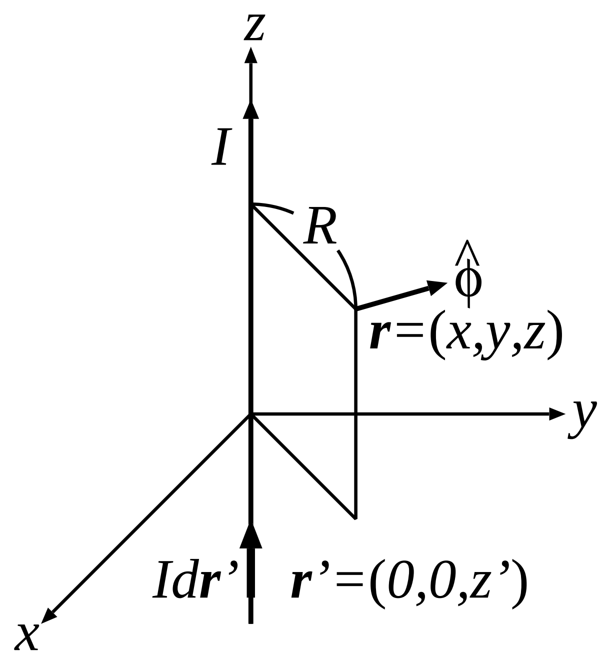
(3)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, .$$

電流素片のつくる磁場は,

(4)
$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, .$$



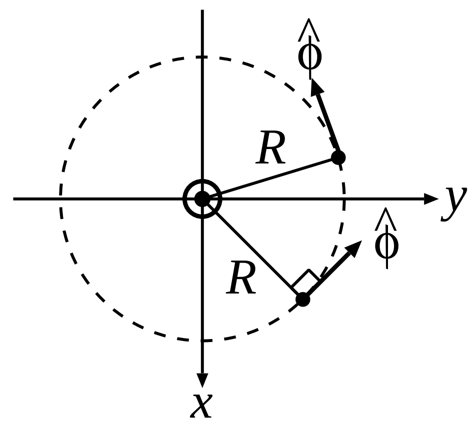
● 例 1: 直線電流のつくる磁場
電流を z 軸にとる.
$d\boldsymbol{r}' = \hat{\boldsymbol{z}} dz'$ ($\hat{\boldsymbol{z}} = (0,0,1)$: z 軸方向の単位ベクトル) と書けるから,



(5) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \, \hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, .$$

(6) $$\hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = (0,0,1) \times (x, y, z - z') = (-y, x, 0) = R\hat{\boldsymbol{\phi}} \, .$$

ただし, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ は方位方向 (z 軸のまわりを回る方向) の単位ベクトル.



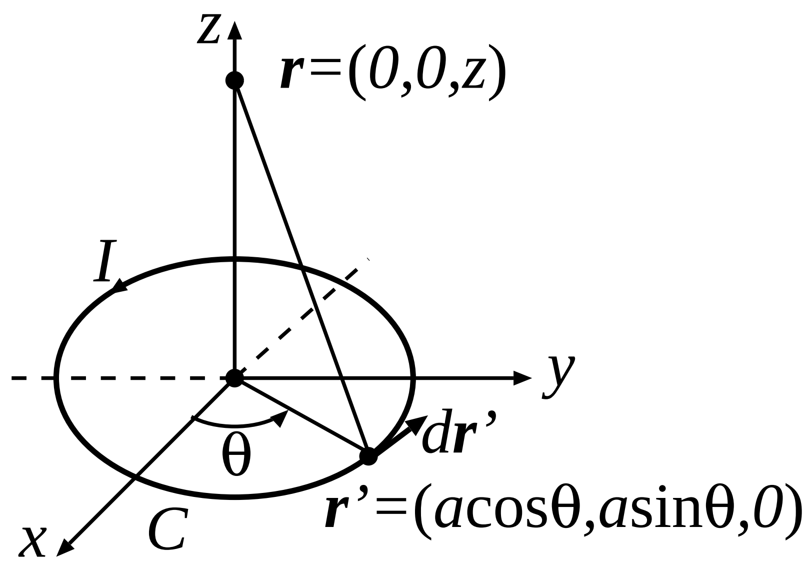
(7)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\hat{\boldsymbol{\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\sqrt{R^2 + (z - z')^2})^3}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R\hat{\boldsymbol{\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\sqrt{R^2 + z'^2})^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{\phi}}\,.$$

電流からの距離に反比例．電流の方向について右ねじをまわす方向．

問: 最後の等号を示せ． (ヒント: $z' = R\tan\theta$ と変数変換.)

例 2: 円電流 (半径 a) が中心軸上につくる磁場

(8) $d\boldsymbol{r}' = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)d\theta$



より,

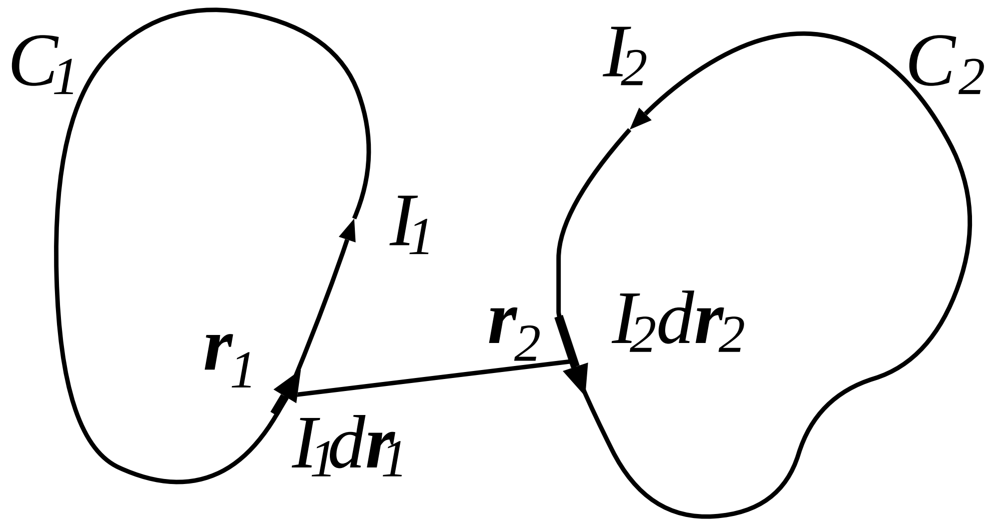
(9) $$d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = ad\theta(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z)$$
$$= ad\theta(z\cos\theta, z\sin\theta, a)\,.$$

(10) $$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}\,.$$

よって,

(11)
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int d\theta (z \cos\theta, z \sin\theta, a) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \,\hat{\boldsymbol{z}}\,.
\end{aligned}
$$

3.3.2　定常電流間に働く力



電流 I_1 が電流 I_2 の場所につくる磁場は，式 (3) より，

(12)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} .$$

この磁場が電流 I_2 に及ぼす力は，式 (3. 2. 17) より，

(13)
$$d\boldsymbol{F} = I_2 d\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2)$$

これを C_2 に沿って積分して,

(14) $$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_2 \times d\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}\,.$$

アンペール (Ampère) の力.

- 例 1: 平行直線電流間に働く力

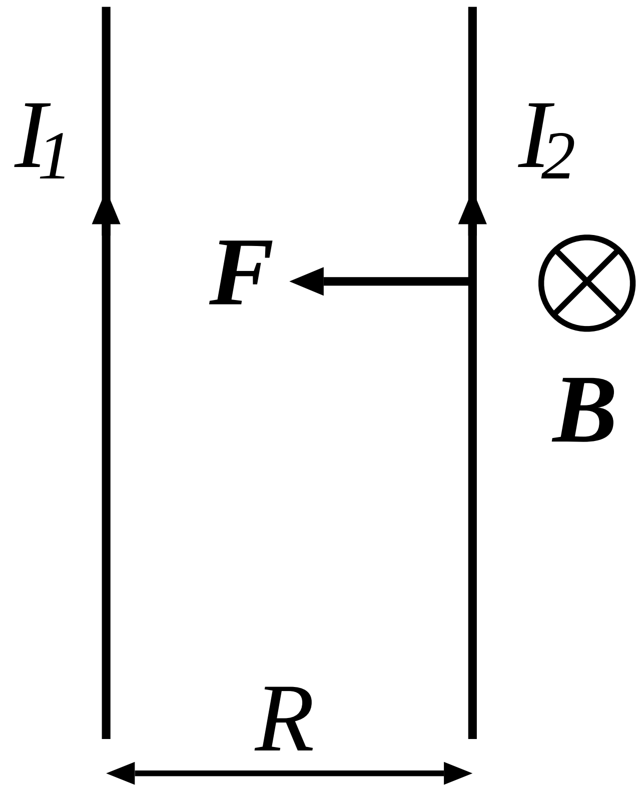
式 (7) より，I_1 が I_2 の所に作る磁場は,

(15) $$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\,.$$

I_2 が受ける力は，式 (13) より,

(16) $$dF = I_2 dr_2 B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dr_2\,.$$

(I_2 と $\boldsymbol{B}$ は直交.)



力の向きは，電流に垂直で，電流が同じ (ちがう) 方向のときは引力 (斥力)．単位長さ当りの力は，

$$F_{単位} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\,. \tag{17}$$

○ 電流の単位 A(アンペア) は，$I_1 = I_2 \equiv I$ として，真空中で，$R = 1\,\mathrm{m}$，$F_{単位} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N/m}$ となるような I を 1A とする．この定義により，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ となる．

3.3.3 ベクトルポテンシャル

(18) $$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,.$$

($\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ についての微分を表わす．) 式 (1) と比較して，

(19) $$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{-1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\times\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\end{aligned}$$

(20) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\equiv\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\ :\quad \underline{\text{ベクトルポテンシャル}}$$

を用いると，

(21) $$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}\qquad(\text{cf. }\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi)$$

式 (3) に対応する式は，

(22) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,.$$ (導線を流れる電流の場合)

● $\boldsymbol{B}$ の発散

式 (21) より，

(23) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0\,.$$ ($\boldsymbol{A}$ の形に依らない．)

式 (2. 5. 48) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ と較べると，“磁荷” が無いことを表わしている．これは $\boldsymbol{B}$ が時間に依存するときも正しい．(説明は第 5 章で)

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0}$$

● ベクトルポテンシャルの不定性

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}'$ が同じ $\boldsymbol{B}$ を与えるとする．

(24) $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}'\,.$$

これより，

(25) $$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) = 0\,.$$

§§2. 4. 5 で示したように，回転がゼロのベクトル場は，スカラー場の勾配で書ける．つまり，$\chi(\boldsymbol{r})$ を適当なスカラー場とすると，

(26) $$\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\chi\,.$$

従って，ある $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を与えるとき，

(27) $$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi$$

も同じ $\boldsymbol{B}$ を与える．実際，

(28) $$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\chi = \boldsymbol{B}\,.$$

この自由度を使って，$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ とすることができる．後で見るように，式 (20) の $\boldsymbol{A}$ はこれを満す．

- 例 1: 一様な磁場

(29)
$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} \qquad (\boldsymbol{B}\text{ は定数ベクトル})$$

とすると,

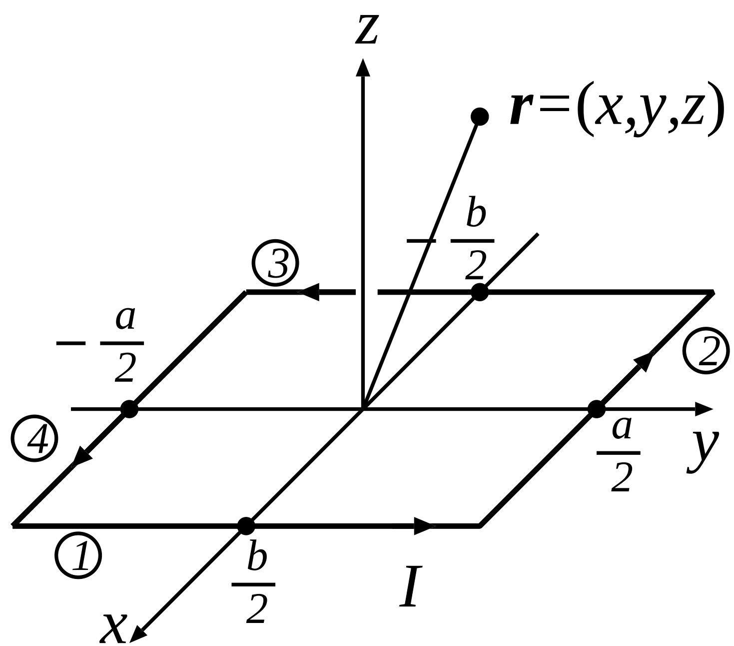
(30)
$$A_x = \frac{1}{2}(B_y z - B_z y)\,,\ A_y = \frac{1}{2}(B_z x - B_x z)\,,$$
$$A_z = \frac{1}{2}(B_x y - B_y x)$$

より,

(31)
$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{1}{2}(B_x + B_x) = B_x\,,$$
$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{1}{2}(B_y + B_y) = B_y\,,$$
$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{2}(B_z + B_z) = B_z\,,$$

すなわち, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$.

● 小さいループ電流の作る磁場.
(ループの大きさに較べて遠方のみを考える．)
図のような xy 平面上の長方形ループ電流 I を考える.



(32) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

辺 1 の積分は，$d\boldsymbol{r}' = \hat{\boldsymbol{y}}dy'$，$\boldsymbol{r}' = (b/2, y', 0)$，とすると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(x-b/2)^2+(y-y')^2+z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2-xb-2yy'+b^2/4+y'^2}}.\end{aligned}$$

$r \gg a, b$ として，($-a/2 < y' < a/2$)

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - xb/r^2 - 2yy'/r^2 + b^2/(4r^2) + y'^2/r^2}}$$
$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{xb}{2r^2} + \frac{yy'}{r^2}\right).$$

$$\int_1 \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \simeq \hat{\boldsymbol{y}}\int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{r}\left(1 + \frac{xb}{2r^2} + \frac{yy'}{r^2}\right) dy' = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{a}{r}\left(1 + \frac{xb}{2r^2}\right).$$

辺 3 の積分は，$b/2 \to -b/2$，$d\boldsymbol{r}' = -\hat{\boldsymbol{y}}dy'$ とすればよい:

$$\int_3 \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \simeq -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{a}{r}\left(1 - \frac{xb}{2r^2}\right).$$

辺 4 の積分は，$d\boldsymbol{r}' = \hat{\boldsymbol{x}}dx'$，$\boldsymbol{r}' = (x', -a/2, 0)$ として，

$$\int_4 \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \hat{\boldsymbol{x}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+(y+a/2)^2+z^2}} \simeq \hat{\boldsymbol{x}} \frac{b}{r}\left(1-\frac{ya}{2r^2}\right).$$

辺 2 は,

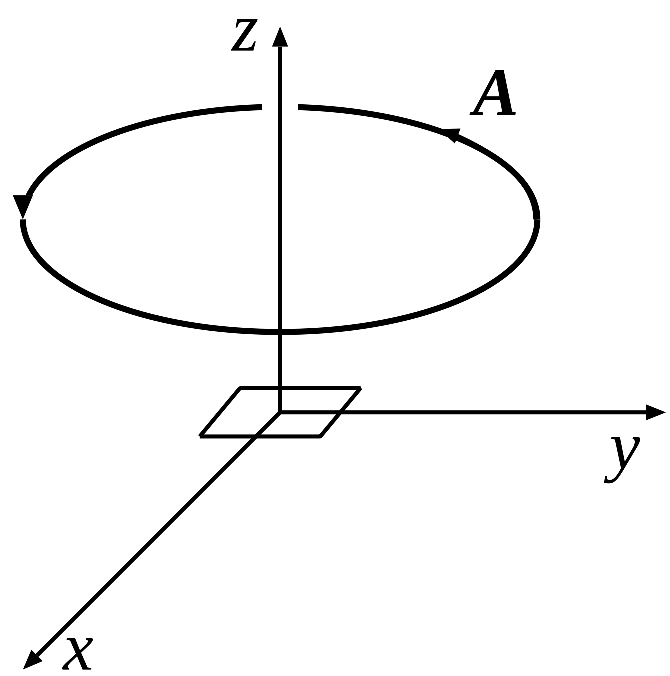
$$\int_2 \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \simeq -\hat{\boldsymbol{x}} \frac{b}{r}\left(1+\frac{ya}{2r^2}\right).$$

まとめると,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{b}{r}\frac{ya}{r^2}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{a}{r}\frac{xb}{r^2}\right) \tag{33}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ab}{r^3}(-\hat{\boldsymbol{x}}y+\hat{\boldsymbol{y}}x)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ab}{r^3}(-y,x,0).$$



(34) $$\boldsymbol{m} \equiv Iab\hat{\boldsymbol{z}}$$ <u>磁気双極子モーメントベクトル</u>

(注: ab は回路の面積，$\hat{\boldsymbol{z}}$ は回路の法線ベクトル．) これを用いると，($\boldsymbol{m} = (0, 0, Iab)$)

(35) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

と書ける．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ から，

(36) $$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) + \frac{1}{r^3} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \right]. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\nabla}(1/r^3) = -3\boldsymbol{r}/r^5$，$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{m}$ を用いると，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{3\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r})}{r^5} + \frac{2\boldsymbol{m}}{r^3} \right].$$

さらに，公式

(37) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ 　問: この公式を示せ.

を用いると，$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{m} r^2 - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})$ で，

(38)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-3\boldsymbol{m} r^2 + 3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{m} r^2}{r^5} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2 \boldsymbol{m}}{r^5} \end{aligned}$$

(cf. (2. 4. 55)，電気双極子の作る電場)

○ 一般に平面回路について，電流 I，面積 S，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とすると，

(39)
$$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}$$

となり，遠方でのベクトルポテンシャル，磁場は式 (35)，(38) で表わされる．

3.3.4 アンペール (Ampère) の法則

● アンペールの法則 (微分形)

式 (20) から与えられる $\boldsymbol{B}$ の回転を考える.

(40) $$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}\,.$$

問: 最後の等号を示せ. 第 1 項の寄与は,

(41) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\,dV'$$

$(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\to\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}$として$)$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\,dV'$$

(部分積分をして)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')) \left(\frac{-1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \right] dV'$$

(定常電流ゆえ$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i} = 0$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) dV'$$

(ガウスの定理を用いて)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{S}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

(電流分布は遠方でゼロ)

$$= 0\,.$$

よって,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\Delta \boldsymbol{A}\,. \tag{42}$$

一方，静電場のときの議論から，式 (2. 4. 19)

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'$$

が，式 (2. 7. 6)

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

の解であることを知っている．これから，式 (20)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'$$

は，

(43)
$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$$

(ベクトルポテンシャルに対するポアッソン方程式) を満すことが分かる．よって，

(44) $$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})}$$ 微分形のアンペールの法則

- 静磁場の満す方程式をまとめると,

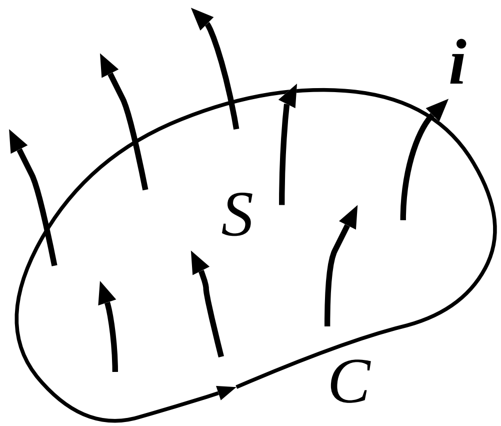
(45) $$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,.$$

- ベクトルポテンシャルを用いると,

(46) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,, \ \Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,, \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

- アンペールの法則 (積分形)

閉曲線 C に囲まれた面 S を考える．式 (44) をこの面で積分すると,



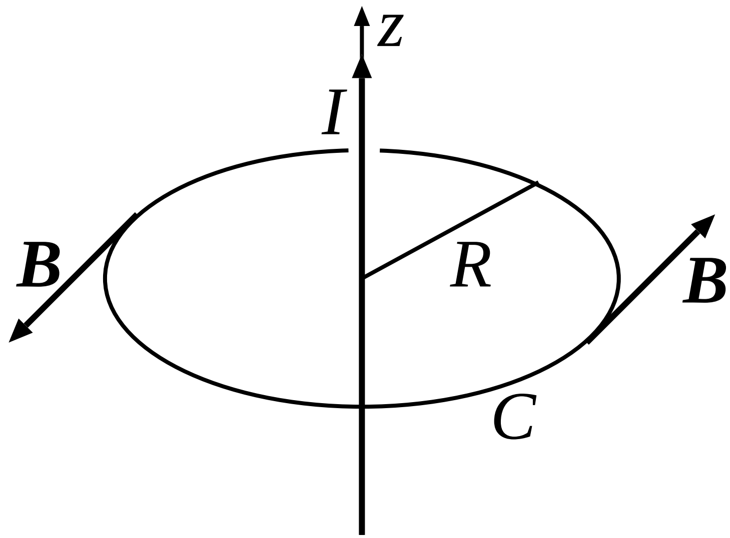
(47) $$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

$\int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S}$ は S を通る電流 I であるから，ストークスの定理より，

(48) $$\boxed{\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I}$$ 積分形のアンペールの法則.

- 例 1: 定常直線電流の作る磁場 (cf. §§3. 3. 1 例 1)

電流 I を z 軸方向にとると，$\boldsymbol{B}$ は z 軸まわりの円周方向を向き，対称性からその大きさは電流からの距離 $R=\sqrt{x^2+y^2}$ にのみよる．すなわち，



(49) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B(R)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,.$$

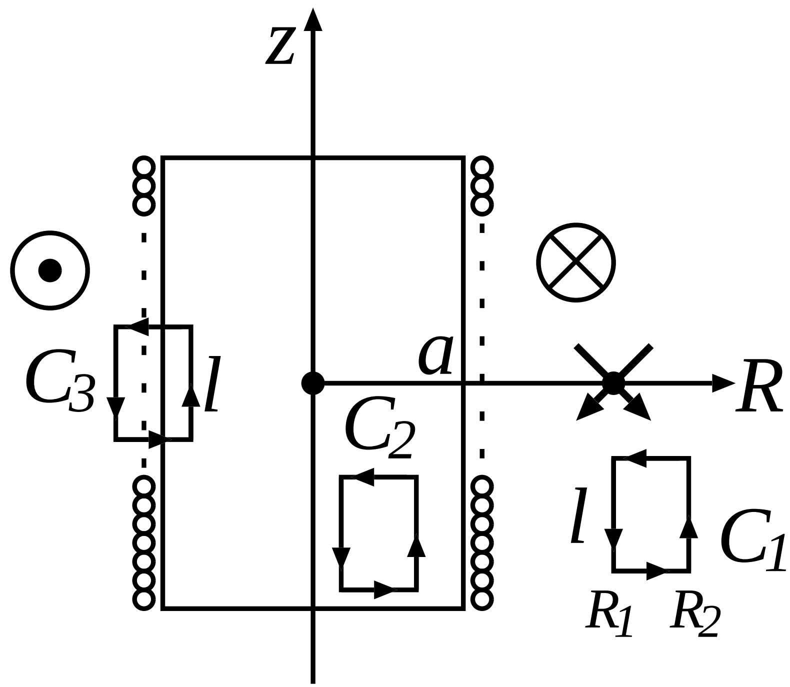
z 軸のまわりの半径 R の円に式 (48) を適用すると，

(50) $$\boxed{} = \mu_0 I\,.$$

つまり,

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,. \qquad \text{cf. (7)} \tag{51}$$

● 例 2: 無限に長いソレノイド
ソレノイドの軸は z 軸，半径 a, 電流 I，単位長さ当りの巻数は n とする．
円周方向の磁場は無い．動径方向の磁場は $\pm z$ の寄与が打ち消し合う．結局，z 成分のみがあり，対称性から,



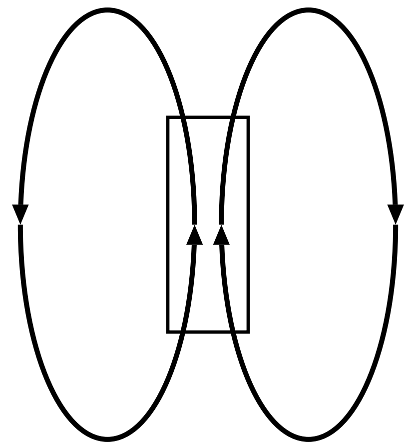
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, B_z(R)) \tag{52}$$

と書ける．閉曲線 C_1 に式 (48) を用いて,

$$\int_{C_1} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = lB_z(R_2) - lB_z(R_1) = 0\,. \tag{53}$$

よって,

(54) $$B_z(R_1) = B_z(R_2)$$ ソレノイド外部では B_z は一定.



同様に，式 (48) を閉曲線 C_2 に適用すると，ソレノイド内部でも B_z は一定.

ソレノイド内部から出た磁束 (ある面 S を貫く $\boldsymbol{B}$ を S で積分したもの) は必ず外部を通って内部にもどらなければならないから,

(55) $$B_z(\text{内部}) \cdot \text{内部の面積} = B_z(\text{外部}) \cdot \text{外部の面積}\,.$$

内部の面積は πa^2，外部の面積は無限大．従って,

(56) $$B_z(\text{外部}) = 0\,.$$

C_3 について考えると,

(57) $$lB_z(\text{内部}) = \mu_0 n l I \, .$$

まとめると,

(58) $$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \, \hat{\boldsymbol{z}} \, , & R < a \\ 0 \, , & R > a \end{cases}$$