

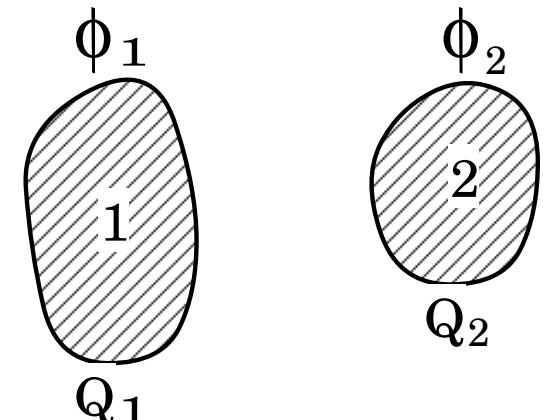
2.10 静電(電気)容量係数と相反定理

2.10.1 静電(電気)容量係数

- 2つの導体から成る系を考える.

導体1(2)のポテンシャルを $\phi_{1(2)}$,
電荷を $Q_{1(2)}$ とする.

- $\phi_1 \neq 0, \phi_2 = 0$ とすると,
ラプラス方程式(とその境界条件)



(1) $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0, \phi(\text{導体 } 1 \text{ の表面}) = \phi_1, \phi(\text{導体 } 2 \text{ の表面}) = 0,$

の解 $\phi_1(\mathbf{r})$ は, ϕ_1 に比例. (ϕ_1 を 2 倍にすれば, $\phi_1(\mathbf{r})$ も 2 倍になる.) 電場, 導体表面の電荷も比例. ($E = -\nabla\phi, E = \sigma/\epsilon_0.$)
従って, C_{11}, C_{21} を定数として,

(2)
$$Q_1 = C_{11}\phi_1, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1.$$

- $\phi_1 = 0$, $\phi_2 \neq 0$ とすると, 同様に

(3) $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$, $\phi(\text{導体 } 1 \text{ の表面}) = 0$, $\phi(\text{導体 } 2 \text{ の表面}) = \phi_2$,

の解 $\phi_2(\mathbf{r})$ は, ϕ_2 に比例. つまり,

$$(4) \quad Q_1 = C_{12}\phi_2, \quad Q_2 = C_{22}\phi_2.$$

- $\phi_1 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$ とした場合,

(5) $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$, $\phi(\text{導体 } 1 \text{ の表面}) = \phi_1$, $\phi(\text{導体 } 2 \text{ の表面}) = \phi_2$,

の解は $\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) + \phi_2(\mathbf{r})$. 従って,

$$(6) \quad Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2.$$

C_{ij} : 静電(電気)容量係数 $(i, j = 1, 2)$.

行列で書くと,

$$(7) \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

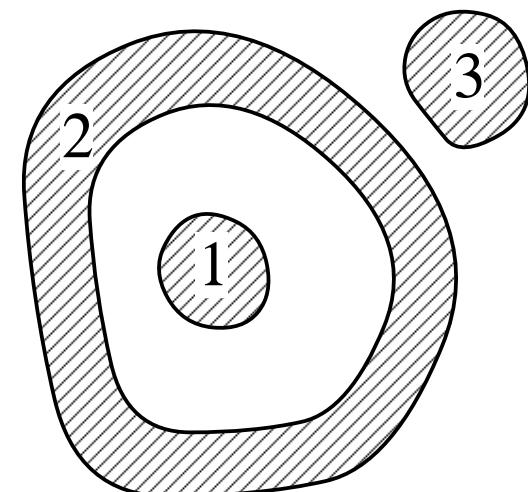
一般に n 個の導体があるとき,

$$(8) \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

- 例: 図のような 3 つの導体を考える.
導体 1 は導体 2 に完全に囲まれている.
一般に,

$$(9) \quad Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3,$$

が成り立つ。



$Q_1 = 0$ とすると、空洞部分も含めて導体 2 の内部に電場はなく、等電位。つまり、 $\phi_1 = \phi_2$ 。式(9)より、

$$(10) \quad 0 = (C_{11} + C_{12})\phi_2 + C_{13}\phi_3.$$

これは任意の ϕ_2, ϕ_3 について成立するので、

$$(11) \quad C_{11} + C_{12} = 0, \quad C_{13} = 0.$$

式(9)に代入すると、

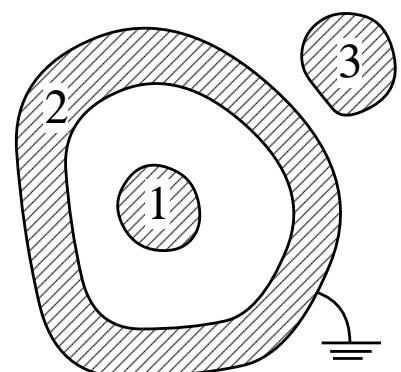
$$(12) \quad Q_1 = C_{11}(\phi_1 - \phi_2).$$

図のように、導体 2 を接地して $\phi_2 = 0$ とすると、

$$(13) \quad Q_1 = C_{11}\phi_1.$$

つまり、導体 1 の電位 ϕ_1 は導体 1 の電荷 Q_1 のみで決まり、導体 2,3 に影響されない。

⇒ 導体 1 は導体 2 によって 静電遮蔽 されている。



2.10.2 相反定理

$$(14) \quad C_{ij} = C_{ji} \quad \text{相反定理}$$

○ 証明: $n = 2$ の場合を考える。

導体の電荷をわずかに変化させたときの静電エネルギーの変化を2つの方法で評価して、結果が一致するための条件を求める。

2つの導体の静電エネルギーは、式(2.9.5)より

$$(15) \quad U_e = \frac{1}{2}(Q_1\phi_1 + Q_2\phi_2).$$

式(7)より、

$$(16) \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}.$$

式(15)に代入して、

$$(17) \quad U_e = \frac{1}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})} \\ \times [C_{22}Q_1^2 - (C_{12} + C_{21})Q_1Q_2 + C_{11}Q_2^2].$$

$Q_1 \rightarrow Q_1 + \delta Q_1$ としたときの U_e の変化は、 δQ_1 の 1 次までで、

$$(18) \quad \delta U_e = \frac{\partial U}{\partial Q_1} \delta Q_1 \\ = \boxed{\phantom{\delta U_e = \frac{\partial U}{\partial Q_1} \delta Q_1}} \delta Q_1.$$

一方、 δU_e は無限遠 ($\phi = 0$) から導体 1 ($\phi = \phi_1$) まで、微小電荷 δQ_1 を運ぶのに必要な仕事に等しい。つまり、

$$(19) \quad \delta U_e = \phi_1 \delta Q_1.$$

式(16)より,

$$(20) \quad \delta U_e = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} (C_{22}Q_1 - C_{12}Q_2)\delta Q_1.$$

式(18)と式(20)を比較して,

$$(21) \quad C_{12} = C_{21}.$$

● コンデンサーの静電容量

$Q_1 = -Q_2 \equiv Q$ として, 式(16)より,

$$(22) \quad \phi_1 = \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q, \quad \phi_2 = -\frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q.$$

よって, 極板間の電位差は,

$$(23) \quad \phi_1 - \phi_2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q.$$

式(2.8.1)と比較して、

$$(24) \quad C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}.$$