

5.2 電磁波

5.2.1 自由空間でのマクスウェル方程式の解

$\rho = 0$, $i = 0$ とする. (自由空間)

- x , y によらず z のみの関数であるような解を考えよう. つまり,
 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(z, t)$.
式 (5. 1. 20) から, ($\rho = 0$ として)

$$(1) \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

式 (5. 1. 21) から,

$$(2) \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

式 (5. 1. 22) から,

$$(3) \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t},$$

$$(4) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$(5) \quad 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

式 (5. 1. 23) から ($i = 0$ として), $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/v^2$ とおくと,

$$(6) \quad -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$(7) \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$(8) \quad 0 = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

式 (1) と式 (8) から, E_z は定数. 静電場に興味はないから (よく知っているから),

$$(9) \quad E_z = 0$$

と置く. 同様に, 式 (2) と式 (5) から,

$$(10) \quad B_z = 0.$$

E_x と E_y は一般にゼロでないが, 特に $E_y = 0$ となる解を考えよう. このとき, 式 (3), 式 (7) より

$$(11) \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0.$$

つまり,

$$(12) \quad B_x = 0$$

と置ける.

これと、式(3), 式(7)から,

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \quad \Leftarrow \quad E_y = 0 \text{ (矛盾はない)}$$

ここまでの結果をまとめると,

$$\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, B_y(z, t), 0).$$

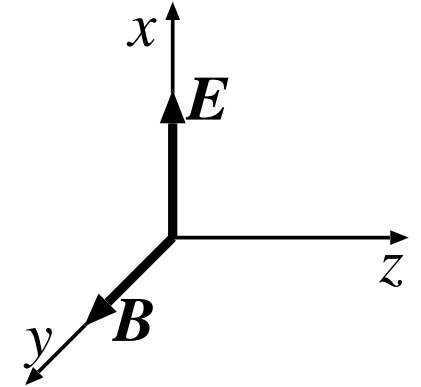
残っている方程式は式(4)と式(6). $\frac{\partial}{\partial z}(4) + \frac{\partial}{\partial t}(6)$ から,

$$(13) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = 0.$$

$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t}(4) + \frac{\partial}{\partial z}(6)$ から,

$$(14) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} B_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_y = 0.$$

式(13), (14) のような方程式を (1次元)波動方程式 という.



式 (13) の一般解は,

$$(15) \quad E_x(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt), \quad f, g : \text{任意関数}.$$

実際,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f'' + g'', \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (-v)^2 f'' + (+v)^2 g'' = v^2(f'' + g'').$$

このとき, 式 (4), (6) より,

$$(16) \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -f' - g', \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v}(f' - g').$$

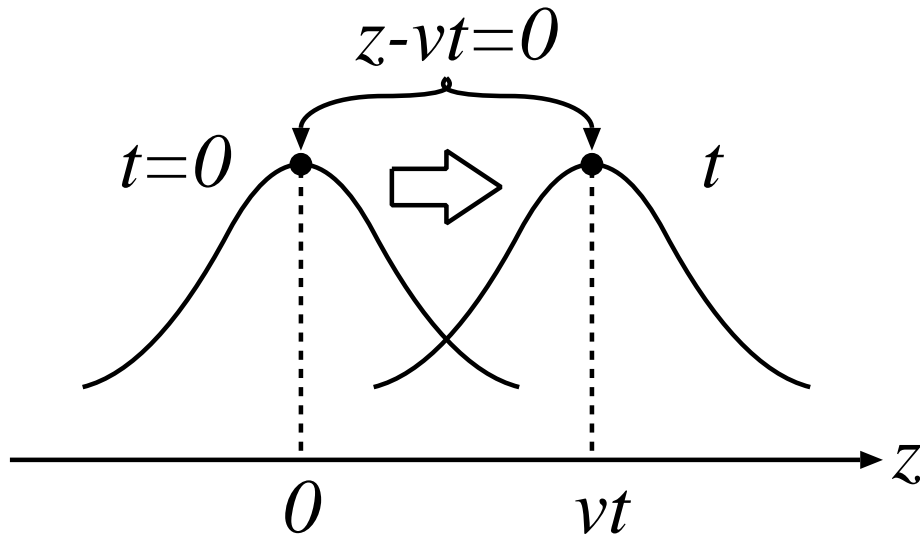
これを積分して,

$$(17) \quad B_y(z, t) = \frac{1}{v}[f(z - vt) - g(z + vt)] + \text{定数}.$$

(定数は以下ではゼロとする.)

- この解の意味

- $f(z - vt)$: 速さ v で z 軸の正の方向に進む波



- $g(z + vt)$: 速さ v で z 軸の負の方向に進む波

- 時刻 t で $z \pm vt$ が一定の面は x - y 平面に平行な面. \Rightarrow 平面波

- $\rho = 0$, $i = 0$ でも真空中を電磁場は伝わって行く.
 \Rightarrow 電磁波

5.2.2 電磁波の性質

- 速さ

式 (2. 1. 4), (3. 3. 2) から,

$$(18) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{4\pi 10^{-7} c^2 \frac{1}{4\pi 10^{-7}}} = c, \quad (\text{真空中の) 光速.}$$

⇒ 光は電磁波.

- 方向性

式 (15), (17) の f の解は, z 軸の正の方向に進み, \mathbf{E} は x 軸方向, \mathbf{B} は y 軸方向. g の解は, z 軸の負の方向に進み, \mathbf{E} は x 軸方向, \mathbf{B} は y 軸の負の方向. ($f, g > 0$ として.)

すなわち, \mathbf{E} , \mathbf{B} は電磁波の進行方向に垂直.

⇒ 電磁波は 横波.

\mathbf{E} と \mathbf{B} も互いに垂直. 一般に, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \propto$ 進行方向 となる.

● 調和振動解 (単色波)

$\frac{\partial}{\partial t}$ (5. 1. 23) に (5. 1. 22) を代入すると, ($i = 0$ として)

$$(19) \quad \nabla \times (-\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

$$(20) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$$

と (5. 1. 20)($\rho = 0$) を用いると,

$$(21) \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3 \text{次元}) \text{波動方程式}$$

同様に, $\frac{\partial}{\partial t}$ (5. 1. 22) と (5. 1. 23) から,

$$(22) \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3 \text{次元}) \text{波動方程式}$$

式 (21) の解として,

$$(23) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_0, \mathbf{k} : \text{定数ベクトル}$$

を考える. $\hat{\mathbf{E}}_0$ は電場の向きを表し, \mathbf{k} は波数ベクトルと呼ばれる. これは \mathbf{k} の方向に進む波を表している. ($\omega > 0$ とする.)

式 (21) に式 (23) を代入して,

$$(24) \quad \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow k \equiv |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (\omega = ck).$$

(5. 1. 20) から, ($\rho = 0$)

$$(25) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \text{電場は } \mathbf{k} \text{ (進行方向) に垂直. (横波)}$$

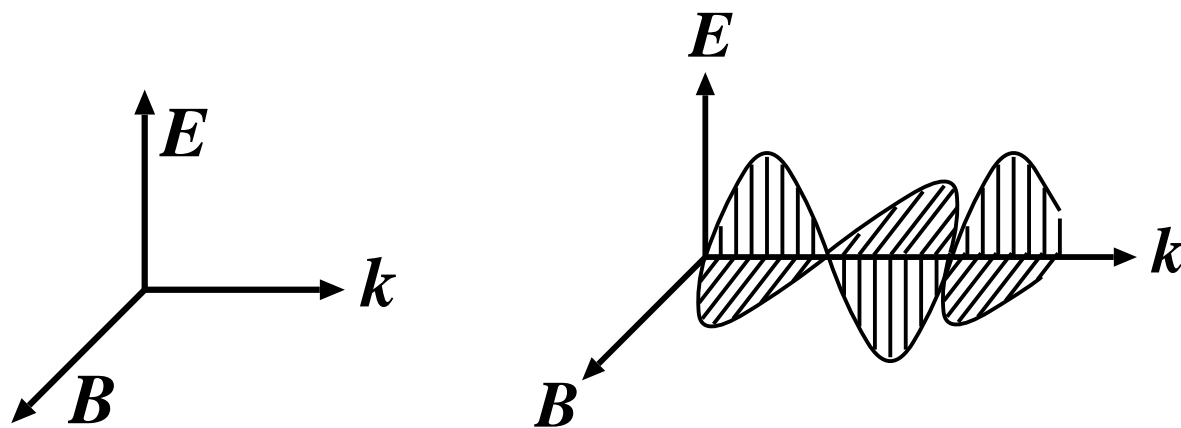
(5. 1. 22) に式 (23) を代入して,

$$(26) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

これを積分して，(式(22)の解として)

$$(27) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{磁場は } \mathbf{E}, \mathbf{k} \text{ と垂直. (横波)}$$

を得る.



また， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ を用いて，

$$(28) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega} [\mathbf{E}^2 \mathbf{k} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}] = \frac{\mathbf{E}^2}{\omega} \mathbf{k} .$$