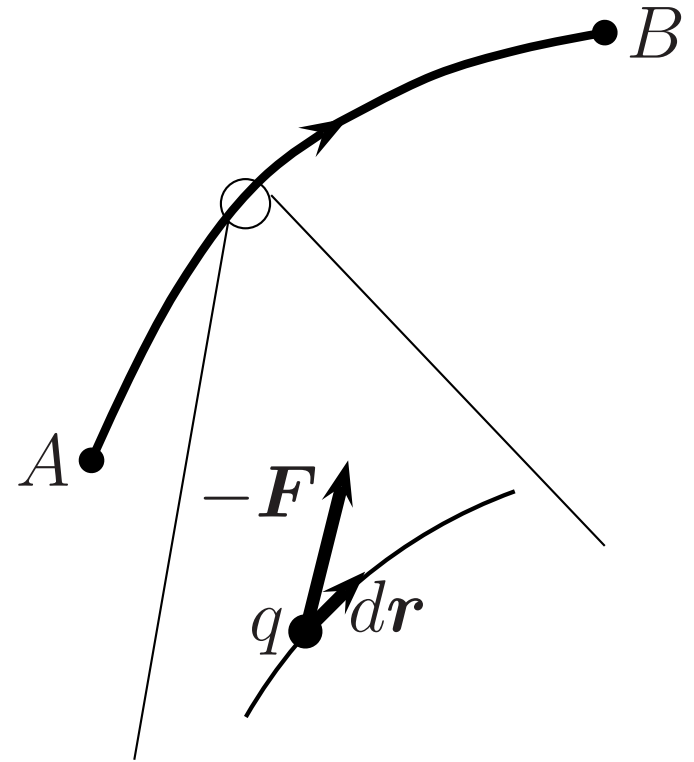


2.4 静電ポテンシャル(電位)

2.4.1 電場中での仕事

- 与えられた電場の中で、「小さな電荷」(与えられた電場への影響を無視できる)を点Aから点Bまで運ぶのに必要な仕事を考える。
クーロン力 F に「抗して」小電荷を動かすから、仕事は、

$$(1) \quad W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



○ 線積分の意味

スカラー $f(x, y, z)$ の A と B を結ぶ曲線 Γ (ガンマ) に沿う積分とは、

$$(2) \quad \int_{\Gamma} f \, dr \equiv \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i f_i \Delta r_i.$$

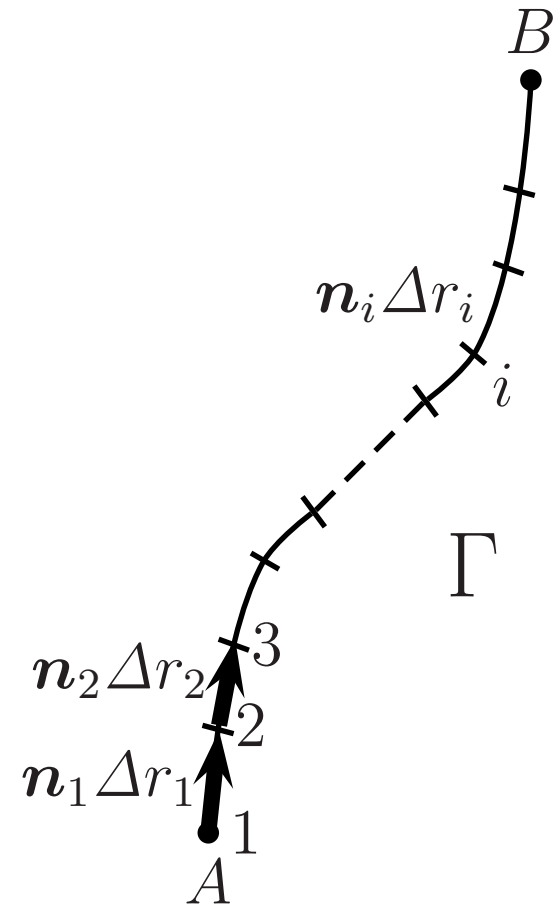
f_i は点 i での f の値, Δr_i は点 i と点 $i+1$ の間の線分の長さを表す.

式 (1) の場合は,

$$(3) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta r_i.$$

ただし, \mathbf{n}_i は点 i から点 $i+1$ に向かう単位ベクトル. つまり, $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i$ は点 i での力の運動方向成分.

(仕事は, 力の運動方向成分 \times 距離.)



注) 線要素 $d\mathbf{r} = \mathbf{n}(r)dr$. $\mathbf{n}(r)$ は r における Γ の単位接ベクトル.

単位電荷当たりの仕事は,

$$(4) \quad w \equiv \frac{W}{q} = - \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{電場の線積分})$$

● w の経路依存性

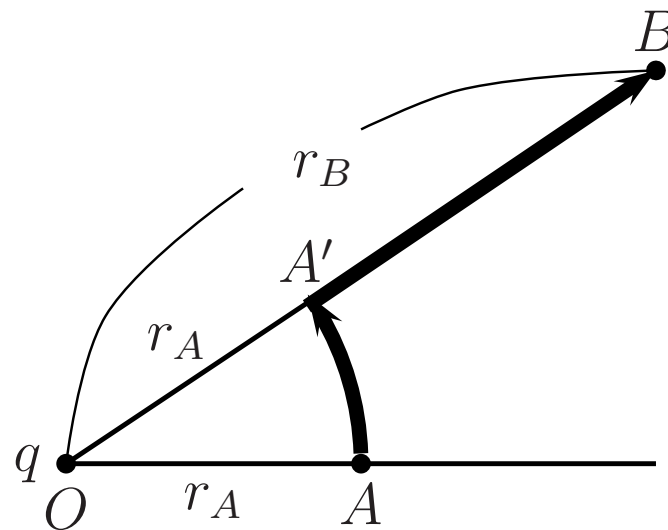
一般に, 線積分はその経路 Γ に依存する.

しかし, 静電場の場合, w は Γ に依存しない.

○ 1つの(点)電荷 q による電場の場合
原点に電荷 q があるとき,

$$(5) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

(i) 右図の A から B への積分を考えると, (経路 $A \rightarrow A' \rightarrow B$)

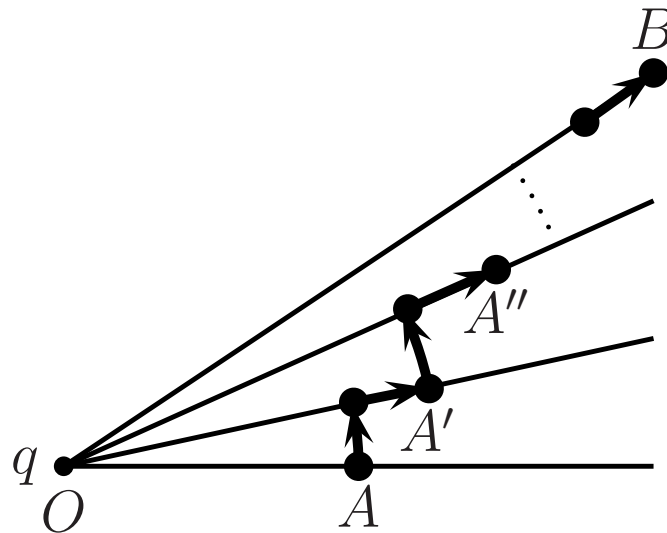


$$w = - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^{A'} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{A'}^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

第1項はゼロ。なぜならば、 $A \rightarrow A'$ では電場の向きは常に動径方向 (\hat{r}) で、電荷の運動方向 ($d\mathbf{r}$) は円周方向だから、 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 。
 $A' \rightarrow B$ では、 $d\mathbf{r} = \hat{r} dr$ ゆえ

$$(6) \quad w = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

(ii) 次に下図の経路 $A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow \dots \rightarrow B$ を考える。



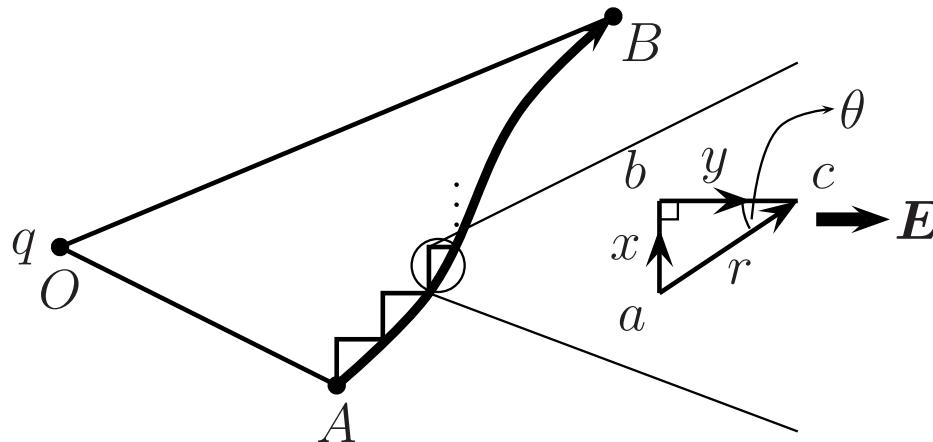
円周方向の積分はすべてゼロだから,

$$\begin{aligned}
 (7) \quad w &= - \int_{r_A}^{r_{A'}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} - \int_{r_{A'}}^{r_{A''}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \cdots - \int^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).
 \end{aligned}$$

前と同じ結果.

⇒ ギザギザの経路 (動径方向と円周方向から成る) の場合, w は経路に依らない.

(iii) 滑らかな経路



三角形 abc はいくらでも小さくできるから， \mathbf{E} は一定と見做せる。
(\mathbf{E} が bc 方向となるように三角形 abc をとる。)

$$(8) \quad \int_{a \rightarrow b \rightarrow c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{E}|y = |\mathbf{E}|r \cos \theta.$$

$$(9) \quad \int_{a \rightarrow c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{E}|r \cos \theta. \quad (|\mathbf{E}| \cos \theta \text{ は } \mathbf{E} \text{ の } ac \text{ 方向成分。})$$

よって，滑らかな経路とギザギザの経路は同じ積分結果。
重ね合せの原理を用いると，一般の静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ について

$$w = - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

は，積分の経路に依存しない。

2.4.2 静電ポテンシャル

- 基準点 P_0 を決めて、スカラー場 ϕ (ファイ) を $P_0 \rightarrow A$ の単位電荷当りの仕事 (点 A の座標を \mathbf{r}_A とする)

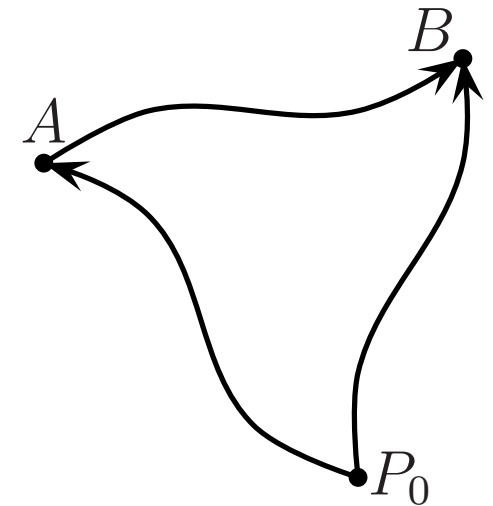
$$(10) \quad \phi(\mathbf{r}_A) \equiv w(P_0 \rightarrow A) = - \int_{P_0}^A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

と定義する. (注: これは経路に依らない.)

$$(11) \quad \phi(\mathbf{r}_B) = - \int_{P_0}^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

$A \rightarrow B$ の仕事は,

$$(12) \quad \begin{aligned} w(A \rightarrow B) &= w(A \rightarrow P_0) + w(P_0 \rightarrow B) \\ &= -w(P_0 \rightarrow A) + w(P_0 \rightarrow B) \\ &= \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A). \end{aligned}$$



一方,

$$(13) \quad w(A \rightarrow B) = - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

よって,

$$(14) \quad - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A).$$

ϕ : 静電ポテンシャル (電位)

$$(15) \quad \phi(\mathbf{r}) = - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'.$$

● P_0 を無限遠にとれば, 原点に置かれたの電荷 q のポテンシャルは, 式 (6) より, $r_A \rightarrow \infty$, $r_B = r$ として,

$$(16) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

- 複数の電荷がある場合
重ね合せの原理 (式 (2. 3. 4)),

$$(17) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{E}_i \text{ は } i \text{ 番目の電荷がつくる電場})$$

より,

$$\begin{aligned} (18) \quad \phi(\mathbf{r}) &= - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \sum_i - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \\ &\quad (\phi_i \text{ は } i \text{ 番目の電荷のポテンシャル}) \\ &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \end{aligned}$$

すなわち、ポテンシャルについても重ね合せの原理が成り立つ。

- 連続的な電荷分布の場合 (体積密度 $\rho(\mathbf{r})$)

$$(19) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad \text{cf. 式 (2. 3. 5)}$$

- 静電ポテンシャルの単位

式 (15) より $(\text{N/C})\text{m} = \text{J/C}$.

$1 \text{ J/C} \equiv 1 \text{ V}$ (ボルト, Volt) と定義する.

E の単位は, V/m と書ける.

2.4.3 ポテンシャルから電場を求めること

少し離れた2点 (x, y, z) と $(x + dx, y, z)$ を考える.
 $(x, y, z) \rightarrow (x + dx, y, z)$ の単位電荷当りの仕事は,



$$(20) \quad \Delta w = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_x dx.$$

ポテンシャルを用いると,

$$(21) \quad \Delta w = \phi(x + dx, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx .$$

よって,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} .$$

y 方向, z 方向についても同様にして,

$$(22) \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) .$$

ベクトル微分演算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{ナブラ})$$

用いると,

$$(23) \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (= -\text{grad } \phi). \quad (\text{gradient: 勾配})$$

これは式 (15) の微分形.

注) 一般にスカラー場 f について, ∇f を f の勾配, f の gradient といい, ∇f はベクトル場になっている.

2.4.4 電場の rotation(回転)

- 一般にベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ について,

$$(24) \quad \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right),$$

を \mathbf{A} の rotation(回転) という. ($\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A}$ などとも書く.)

- 式 (23) から,

$$\begin{aligned}
 (25) \quad (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0.
 \end{aligned}$$

x, y 成分についても同様. よって,

$$(26) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

注) ϕ の具体的な形は用いていない. 一般に $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$ ($f(\mathbf{r})$ はスカラー場) のとき, $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

○ クーロン場が式 (26) を満すこと

$$(27) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

の回転は,

$$\begin{aligned}
(28) \quad (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{y - y_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(y - y_0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - (x - x_0) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] = 0.
\end{aligned}$$

問) 最後の等式を示せ.

重ね合せの原理から、任意の電荷分布について、

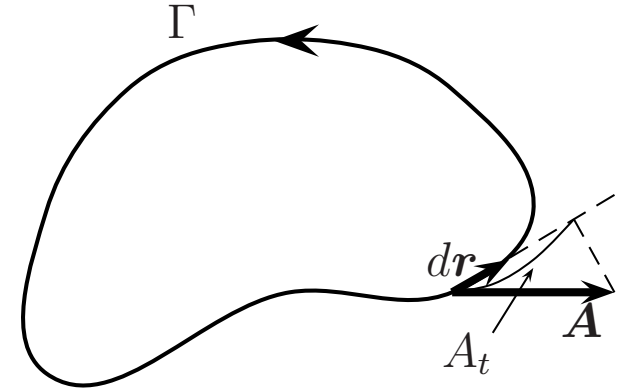
$$(29) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

となる。これで、静電場の法則 (の一部) を微分形に書くことができた。(近接相互作用の考え方)

2.4.5 ストークス (Stokes) の定理と保存場

- ストークスの定理

- 閉曲線 (ループ) Γ を考える.
任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の Γ への接線成分を, Γ に沿って1周積分したものを考える. (反時計回りを正の方向とする.)

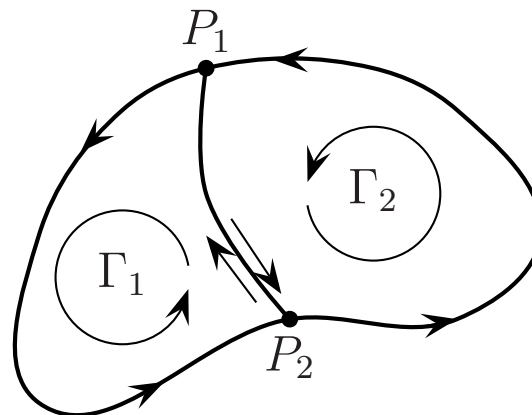


$$(30) \quad \oint_{\Gamma} A_t(\mathbf{r}) dr = \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

(\oint は1周積分, A_t は \mathbf{A} の接線成分を表す.)

これをベクトル場の循環 (circulation) という. (cf. 式 (1))

- 循環の分割



P_1, P_2 間の積分は, Γ_1 では

$$\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

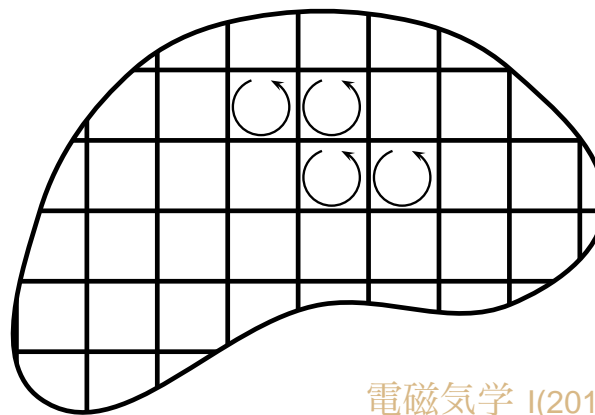
Γ_2 では

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

で互いに打ち消し合う. よって,

$$(31) \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

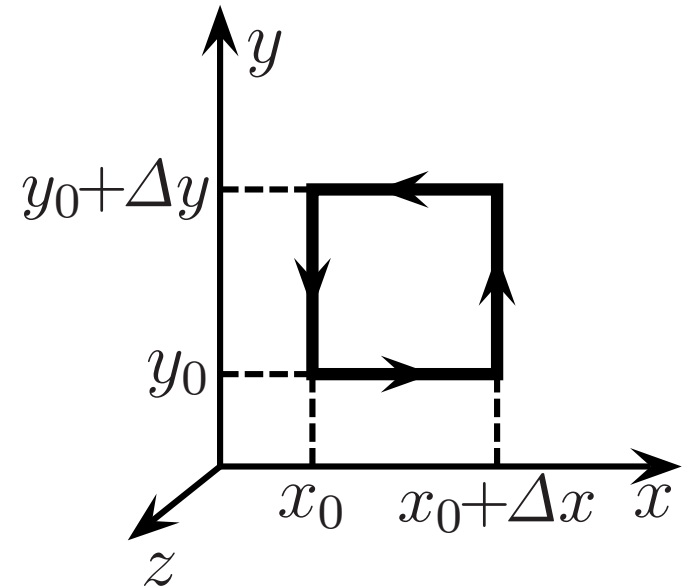
同様にして, Γ に沿う循環を Γ を境界とする面上の小ループの和に分割できる.



$$(32) \quad \oint_{\Gamma} = \sum \oint_{\text{小ループ}}.$$

分割を無限に小さくすれば，どの小ループも小さい正方形で近似できる。

- 無限小正方形 (長方形でもよい) の周りの循環
正方形を xy 平面にとる。



$$(33) \quad \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} A_x(x, y_0, z) dx + \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} A_y(x_0 + \Delta x, y, z) dy$$

$$+ \int_{x_0 + \Delta x}^{x_0} A_x(x, y_0 + \Delta y, z) dx + \int_{y_0 + \Delta y}^{y_0} A_y(x_0, y, z) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [A_x(x, y_0, z) - A_x(x, y_0 + \Delta y, z)] dx \\
&\quad + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} [A_y(x_0 + \Delta x, y, z) - A_y(x_0, y, z)] dy
\end{aligned}$$

$$A_x(x, y_0 + \Delta y, z) = A_x(x, y_0, z) + \frac{\partial A_x(x, y_0, z)}{\partial y} \Delta y + O((\Delta y)^2)$$

などを用いると、(注: 右辺第2項は, $\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=y_0}$ の意.)

被積分関数の Δx , Δy の2次以上を無視して,

$$\begin{aligned}
&\simeq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left[-\frac{\partial A_x(x, y_0, z)}{\partial y} \Delta y \right] dx + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left[\frac{\partial A_y(x_0, y, z)}{\partial x} \Delta x \right] dy \\
&\simeq -\frac{\partial A_x(x_0, y_0, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial A_y(x_0, y_0, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\nabla \times \mathbf{A})_z \Delta x \Delta y = (\nabla \times \mathbf{A})_z dS$$

($\Delta x \Delta y =$ 小正方形の面積 $= dS$ を用いた.)

小正方形の法線ベクトル \mathbf{n} (単位ベクトル) は z 軸の正の方向 (右手系をとる) ゆえ,

$$= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} dS \quad \text{面要素})$$

(座標系に依らない形に書けた.)

○ 分割の議論, 式 (32) から, S を Γ を境界とする面 とすると,

$$(34) \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum \oint_{\text{小正方形}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \sum_{\text{小正方形}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{面積分})$$

まとめると,

$$(35) \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} .$$

これを, **ストークスの定理** という.

○ 例: 角速度 ω で回転する円板

点 $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ での速度は

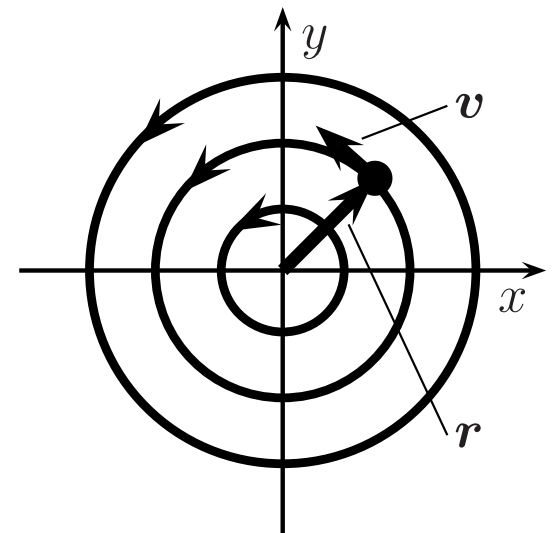
$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (-y\omega, x\omega, 0)$ で, $|\mathbf{v}(\mathbf{r})| = r\omega$.

$$(36) \quad \oint_{r=a} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi a a\omega = 2\pi a^2\omega .$$

一方,

$$(37) \quad \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (0, 0, 2\omega)$$

より,



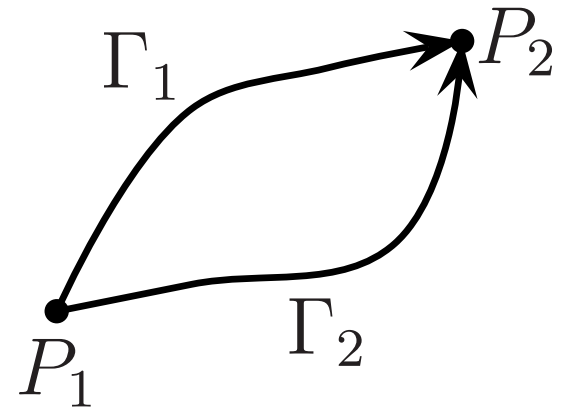
$$(38) \quad \int_{r \leq a} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2\omega \pi a^2.$$

確かに，ストークスの定理が成り立っている。

注) $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ の場 \Rightarrow 渦なし． $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$ の場 \Rightarrow 渦あり．

● 保存場

○ 任意の 2 点 P_1, P_2 間の曲線に沿う積分がその経路に依存しないようなベクトル場を考えよう。



$$(39) \quad \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

このとき，任意の閉曲線に沿う積分はゼロである．なぜなら， $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ として，

$$(40) \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(逆に, $\oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ であれば, 2点間の積分は経路に依らない.)

このとき, ストークスの定理 (35) より,

$$(41) \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

S は任意の面だから,

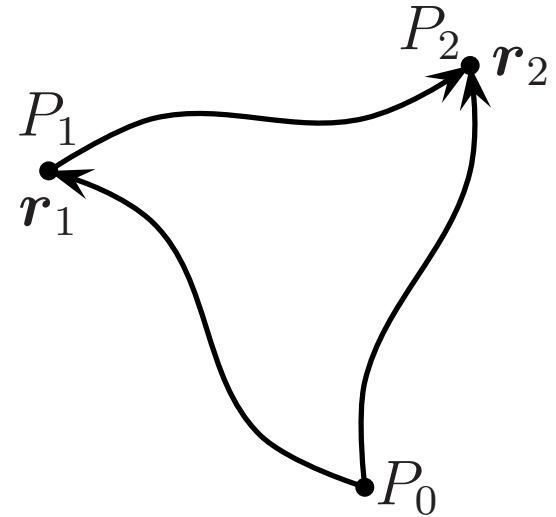
$$(42) \quad \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{至る所で rotation がゼロ.})$$

(逆に, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ なら $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$)

○ $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ のとき, 適当なスカラー場 $f(\mathbf{r})$ を用いて, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$ と書けることを示そう.

2点間の曲線に沿う $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の積分は, その経路に依存しないから, 基準点 P_0 を決めれば,

$$\begin{aligned}
 (43) \quad & \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
 &= f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1).
 \end{aligned}$$



ただし,

$$(44) \quad f(\mathbf{r}) \equiv \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'.$$



これより,

$$(45) \quad f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

一方, ($d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$)

$$(46) \quad f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

よって,

$$(47) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}).$$

このような場を 保存場 という. (f はポテンシャルに相当する.)

○ 逆に, $\mathbf{A} = \nabla f$ のとき, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$.
(計算は式 (25) と同様. 式 (26) の注を見よ.)

○ 静電場 (クーロン場) のときの議論を見直してみよう.

式 (5) から式 (9) の議論で, $w = -\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ が積分経路に依らないことを示した. この議論は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}$ であれば, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の r 依存性にはよらない. 例えば, (ii) の経路では,

$$(48) \quad w = -\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ = -\int_{r_A}^{r_{A'}} g(r) dr - \int_{r_{A'}}^{r_{A''}} g(r) dr - \dots = -\int_{r_A}^{r_B} g(r) dr.$$

w が経路に依らないことから，ポテンシャル ϕ の存在を示し， $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と書けることも示した．また， $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ も示した．この結果は，静電場 (クーロン場) の r 依存性 ($1/r^2$ 則) には無関係であることが分かる．

従って， $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ はクーロンの法則 (静電場の法則) の一部であり，($1/r^2$ 則を決定するような) さらなる (微分形の) 方程式があるはず． (\implies §2. 5)

2.4.6 等電位面と電気力線

- gradient の意味

$$(49) \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) .$$

$(\nabla f)_x = \partial f / \partial x$ は， f の x 方向への変化の速さ．同様に， ∇f のある方向の成分は，その方向への変化率． (cf. 式 (46))

従って， ∇f の方向は f が一番速く変化する方向である．

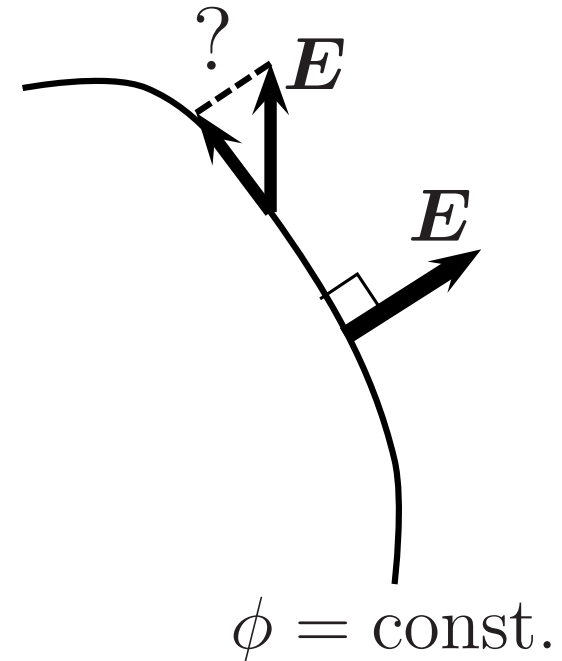
- 等電位面 (等ポテンシャル面)

(50) $\phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$

となるような面を等電位面 (あるいは等ポテンシャル面) という。

(51) $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

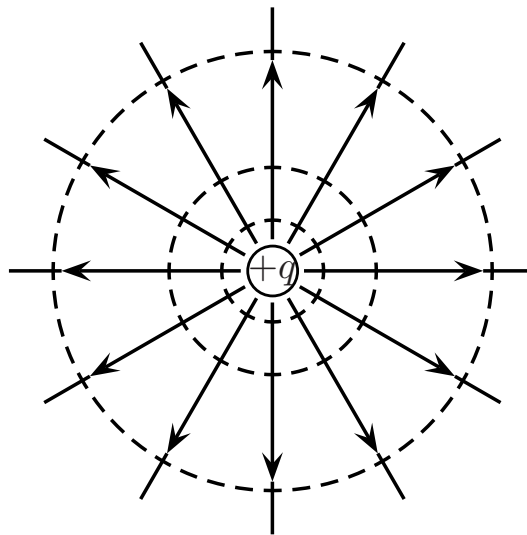
であったから、 \mathbf{E} は ϕ が最も速く変化
する方向を向いていて、等電位面に垂
直である。なぜならば、もし垂直でな
いならば、 \mathbf{E} の等電位面に沿う方向の
成分があることになり、ポテンシャル
が面上で変化することになる。これは
定義に反する。



- 電場は各点で電気力線に接していたから、
電気力線と等電位面は垂直。

- 例: 1 つの点電荷 $q(> 0)$

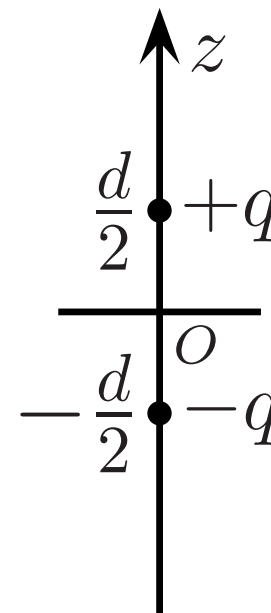
等電位面は球面になる。



- 例題 1: 電気双極子のポテンシャルと電場
(cf. §§2. 3. 3 の例)

式 (18) より,

$$(52) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right].$$



遠方 ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg d$) では,

$$\begin{aligned} (53) \quad \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(r^2 - zd + \frac{d^2}{4} \right)^{-1/2} - \left(r^2 + zd + \frac{d^2}{4} \right)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[1 + \frac{zd}{2r^2} - \left(1 - \frac{zd}{2r^2} \right) + O((d/r)^2) \right] \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{zd}{r^3}, \end{aligned}$$

電気双極子モーメントベクトル $\mathbf{p} = (0, 0, qd)$ を用いると,

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ から, $(\partial r^{-n}/\partial x = -nx/r^{n+2}$ などを用いて)

$$(54) \quad \begin{aligned} E_x &\simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_x}{r^3} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{3x}{r^5} \right], \\ E_y &\simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_y}{r^3} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{3y}{r^5} \right], \\ E_z &\simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{3z}{r^5} \right]. \end{aligned}$$

まとめると, 原点にある電気双極子 \mathbf{p} がつくる電場は,

$$(55) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}.$$

$\mathbf{p} = (0, 0, qd)$ のときは, $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = qdz)$

$$(56) \quad E_x \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qdzx}{r^5} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \quad E_y \simeq \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5},$$

$$E_z \simeq \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right).$$

z 軸上 ($\mathbf{r} = (0, 0, z)$) では,

(57)



式 (2. 3. 17) と一致. xy 平面上 ($z = 0$) では,

(58)



(xy 平面は等ポテンシャル面.)