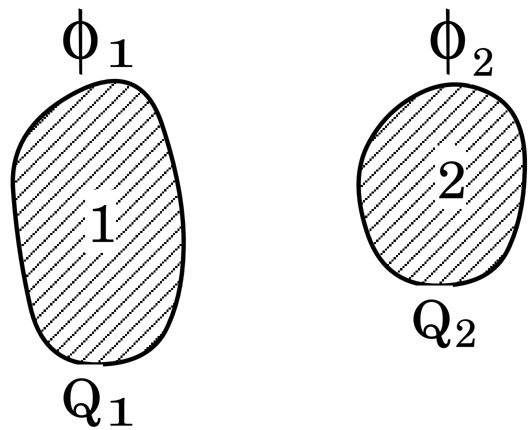
2.10　静電 (電気) 容量係数と相反定理

2.10.1　静電 (電気) 容量係数

- 2 つの導体から成る系を考える.



導体 1(2) のポテンシャルを $\phi_{1(2)}$,
電荷を $Q_{1(2)}$ とする.

○ $\phi_1 \neq 0$,　$\phi_2 = 0$ とすると,
ラプラス方程式 (とその境界条件)

(1)　$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 1 の表面}) = \phi_1\,,\ \phi(\text{導体 2 の表面}) = 0\,,$

の解 $\phi_1(\boldsymbol{r})$ は, ϕ_1 に比例. (ϕ_1 を 2 倍にすれば, $\phi_1(\boldsymbol{r})$ も 2 倍になる.) 電場, 導体表面の電荷も比例. ($\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, $E = \sigma/\varepsilon_0$.)
従って, C_{11}, C_{21} を定数として,

(2)　$$Q_1 = C_{11}\phi_1\,, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1\,.$$

○ $\phi_1 = 0$, $\phi_2 \neq 0$ とすると，同様に

(3) $\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 1 の表面}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 2 の表面}) = \phi_2\,,$

の解 $\phi_2(\boldsymbol{r})$ は，ϕ_2 に比例．つまり，

(4) $$Q_1 = C_{12}\phi_2\,, \quad Q_2 = C_{22}\phi_2\,.$$

○ $\phi_1 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$ とした場合，

(5) $\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 1 の表面}) = \phi_1\,,\ \phi(\text{導体 2 の表面}) = \phi_2\,,$

の解は $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_1(\boldsymbol{r}) + \phi_2(\boldsymbol{r})$. 従って，

(6) $$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2\,, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2\,.$$

$$C_{ij} : \underline{\text{静電 (電気) 容量係数}} \quad (i, j = 1, 2)\,.$$

行列で書くと,

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} .$$

一般に n 個の導体があるとき,

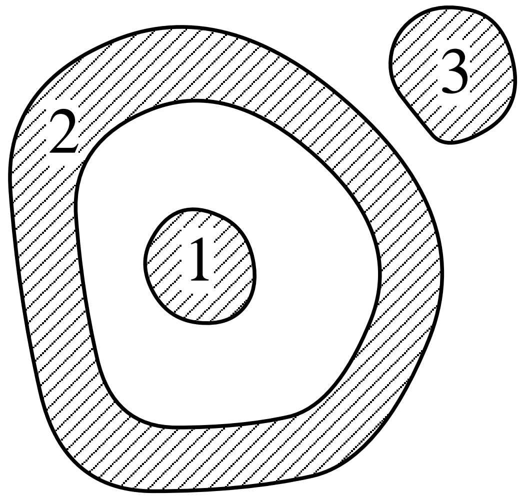
$$(8)\qquad \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} .$$

- 例: 図のような 3 つの導体を考える.

導体 1 は導体 2 に完全に囲まれている.
一般に,

$$(9)\qquad Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3 \,,$$

が成り立つ.



$Q_1 = 0$ とすると，空洞部分も含めて導体 2 の内部に電場はなく，等電位．つまり，$\phi_1 = \phi_2$. 式 (9) より，

(10) $$0 = (C_{11} + C_{12})\phi_2 + C_{13}\phi_3 \,.$$

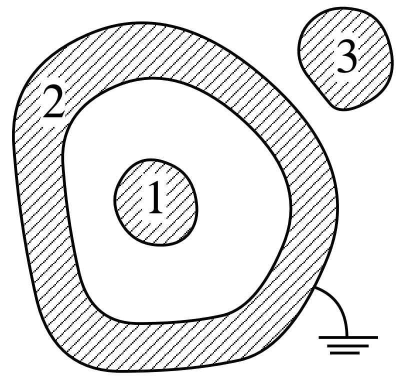
これは任意の ϕ_2，ϕ_3 について成立するので，

(11) $$C_{11} + C_{12} = 0 \,, \quad C_{13} = 0 \,.$$

式 (9) に代入すると，

(12) $$Q_1 = C_{11}(\phi_1 - \phi_2) \,.$$

図のように，導体 2 を接地して $\phi_2 = 0$ とすると，



(13) $$Q_1 = C_{11}\phi_1 \,.$$

つまり，導体 1 の電位 ϕ_1 は導体 1 の電荷 Q_1 のみで決まり，導体 2,3 に影響されない．

$\Longrightarrow$ 導体 1 は導体 2 によって 静電遮蔽 されている．

2.10.2 相反定理

(14) $$\boxed{C_{ij} = C_{ji}} \qquad \text{相反定理}$$

○ 証明: $n = 2$ の場合を考える.
導体の電荷をわずかに変化させたときの静電エネルギーの変化を 2 つの方法で評価して，結果が一致するための条件を求める.

2 つの導体の静電エネルギーは，式 (2. 9. 5) より

(15) $$U_e = \frac{1}{2}(Q_1\phi_1 + Q_2\phi_2)\,.$$

式 (7) より,

(16) $$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}.$$

式 (15) に代入して,

(17) $$U_e = \frac{1}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})} \times [C_{22}Q_1^2 - (C_{12} + C_{21})Q_1Q_2 + C_{11}Q_2^2]\,.$$

$Q_1 \to Q_1 + \delta Q_1$ としたときの U_e の変化は，δQ_1 の 1 次までで，

(18) $$\delta U_e = \frac{\partial U}{\partial Q_1}\delta Q_1 = \boxed{}\,\delta Q_1\,.$$

一方，δU_e は無限遠 ($\phi = 0$) から導体 1($\phi = \phi_1$) まで，微小電荷 δQ_1 を運ぶのに必要な仕事に等しい．つまり，

(19) $$\delta U_e = \phi_1 \delta Q_1\,.$$

式 (16) より,

(20) $$\delta U_e = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} (C_{22}Q_1 - C_{12}Q_2)\delta Q_1 \,.$$

式 (18) と式 (20) を比較して,

(21) $$C_{12} = C_{21} \,.$$

- コンデンサーの静電容量

$Q_1 = -Q_2 \equiv Q$ として，式 (16) より,

(22) $$\phi_1 = \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q \,, \quad \phi_2 = -\frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q \,.$$

よって，極板間の電位差は,

(23) $$\phi_1 - \phi_2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q \,.$$

式 (2. 8. 1) と比較して,

(24)
$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \, .$$